Institut des Hautes Etudes Commerciales Carthage

IHEC Carthage

Filières : 2EME ANNEE LFG

Matière : STATISTIQUE

Enseignant : Torgeman-Tnani-Jelassi-Laabidi-Attiaoui

2H

Examen principal, Janvier 2011

Exercice 1 (10 points)

Soit $(X_1, \ldots\ldots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires Indépendantes et Identiquement Distribuées, suivant une loi normale d'espérance $E(X) = 0$ et de variance $V(X) = \theta$.

1/ Quelle est la loi de la variable aléatoire $T = \frac{X - 0}{\sqrt{\theta}}$

2/ On définit une nouvelle variable aléatoire : $Y = \frac{X^2}{\theta}$. Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire Y.

~~3/ Quelle est la loi de la variable aléatoire Y? Donner son espérance~~ mathématique $E(Y)$ et sa variance $V(Y)$.

4/ Déterminer $\hat{\theta}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance.

5/ Etudier les propriétés de $\hat{\theta}$ (sans biais, convergent, efficace).

Exercice 2 (6 points)

Soit X_1, [redacted]..., X_n un échantillon aleatoire Indépendantes et Identiquement Distribuées de ~~taille n=25 suivant une loi normale d'espérance~~ $\boxed{m \text{ inconnue}}$ ~~et de variance~~ σ^2. On pose la variance empirique : $S^2 = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. On définit une variable aléatoire $H = \frac{k}{\sigma^2}S^2$.

1/ Déterminer le nombre k pour que H soit une loi de Khi-deux. Préciser son degré de liberté et en déduire son espérance et sa variance.

2/ Déterminer un intervalle de confiance au niveau 90% pour σ^2 sachant que $S^2 = 5$.

3/ On suppose que $\sigma^2 = 4$. Déterminer un intervalle de confiance au niveau 95% pour m sachant que $\sum_{1}^{25} x_i = 300$.

Exercice 3 (4 points)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ d'écart-type connu $\sigma = 3$. On dispose de 36 observations indépendantes de la variable X. Les observations ont donné une moyenne empirique $\bar{x} = 13$. On se propose de tester l'hypothèse $H_0 : m = 12$ contre $H_1 : m = 14$.

1/Construire un test de niveau $\alpha = 5\%$ (α est le risque de première espèce). Quelle est la décision à prendre ?

Examen 2011 (SP)

Ex#1 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ échantillon de VA iid

$X_i \rightsquigarrow N(0, \theta)$

(1) on a $X_i \rightsquigarrow N(0, \theta)$

$$\Rightarrow \frac{X-0}{\sqrt{\theta}} \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow T = \frac{X}{\sqrt{\theta}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

(2) $Y = \frac{X^2}{\theta} \Rightarrow F_Y(y) = P(Y < y)$

$$F_Y(y) = P\left(\frac{X^2}{\theta} < y\right) = P(X^2 < \theta y)$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = (-\sqrt{\theta y} < x < \sqrt{\theta y})$$

avec $y > 0$

$$\Rightarrow F_Y(y) = F_X(\sqrt{\theta y}) - F_X(-\sqrt{\theta y}) = 2F_X(\sqrt{\theta y}) - 1$$

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_Y'(y) = 2\left(f_X(\sqrt{\theta y}) \times \frac{\theta}{2\sqrt{\theta y}}\right)$$

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{\theta y}) \times \sqrt{\frac{\theta}{y}}$$

or $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} \Rightarrow f_X(\sqrt{\theta y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{y}{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}}$$

(3) on a $X \rightsquigarrow N(0, \theta)$

$$Y = \frac{X^2}{\theta} = \frac{(X-0)^2}{\sqrt{\theta}^2} = \left(\frac{X-0}{\sqrt{\theta}}\right)^2$$

or $\frac{X}{\sqrt{\theta}} \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow Y \rightsquigarrow \chi^2(1)$

$Y =$ Somme de 2 $N(0,1)$ Jibenta

$$Y = \frac{X^2}{\theta} \rightsquigarrow \chi^2(1) \Rightarrow \begin{cases} E(Y) = 1 \\ V(Y) = 2 \end{cases}$$

(4) $\hat{\theta}_{MVS}$?

soit $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \hat{\theta}) = f(x_1) \times \dots \times f(x_n)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x_1^2}{2\theta}} \times \dots \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x_n^2}{2\theta}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\theta})^n} e^{-\frac{n}{2\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\log \mathcal{L} = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\theta) - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{-n}{2\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\theta^2} = \frac{-n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\theta^2}$$

$$\hat{\theta}_i ? \Rightarrow \frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

(5) Biais ?

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

$$= \frac{n}{n} E(x_i^2) \; ?$$

or $V(x_i) = E(x_i - E(x_i))^2 = \theta$

car $x_i \rightsquigarrow (0, \theta)$

$$E(x_i - \underbrace{E(x_i)}_{=0})^2 = \theta \Rightarrow E(x_i^2) = \theta$$

$$\Rightarrow E(\hat{\theta}) = E(x_i^2) = \theta$$

$E(\hat{\theta}) = \theta \Rightarrow \hat{\theta}$ non biaisé

(2)

lubentia

$\hat{\theta}$

Convergence ?

$$V(\hat{\theta}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum x_i^4\right)$$

$$= \frac{n}{n^2} V(x_i^2)$$

$$\text{or} \quad \frac{x_i^2}{\theta} \sim \chi(1) \Rightarrow V(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} V\left(\frac{x_i^2}{\theta} \times \theta\right)$$

$$V(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{n} V\left(\frac{x_i^2}{\theta}\right) = \frac{2\theta^2}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} V(\hat{\theta}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{2\theta^2}{n} = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{n \to +\infty} E(\hat{\theta}) = \lim_{n \to +\infty} \theta = \theta \quad (2)$$

(1) + (2) $\Rightarrow$ $\hat{\theta}$ est convergent

Efficacité pour que $\hat{\theta}$ soit efficace

il faut que $V(\hat{\theta}) = \frac{1}{I_n(\hat{\theta})}$

avec $I_n(\hat{\theta}) = -n\, E\left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial \theta^2}\right)$

$$\log f = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\, e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\log(2\pi\theta) - \frac{x^2}{\theta} = -\frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log\theta - \frac{x^2}{\theta}$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial \theta} = -\frac{1}{2\theta} + \frac{x^2}{\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2\theta^2} + \left(\frac{-2\theta x^2}{\theta^4}\right)$$

$$= \frac{1}{2\theta^2} - \frac{2x^2}{\theta^3} = \frac{\theta - 4x^2}{2\theta^3}$$

Jiberila

$$E\left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial \theta^2}\right) = E\left(\frac{\theta - 4x^2}{2\theta^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2\theta^3} E\left(\theta - 4X^2\right)$$

$$= \frac{1}{2\theta^3}\left(\theta - 4\underbrace{E\left(X^2\right)}_{\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2\theta^2} \Rightarrow -n\,E\left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial \theta^2}\right) = \frac{-n}{2\theta^2} = I_n(\hat{\theta})$$

$$V(\hat{\theta}) = \frac{2\hat{\theta}^2}{n} \Rightarrow V(\hat{\theta}) = -n\left[E\left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial \theta^2}\right)\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} \text{ efficace}$$

Ex # 2 :

$(X_1, \dots, X_n)$ échi. VA iid   m inconnu

$n = 26$, $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$

$$S'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{25} \cdot \sum^{26} (x_i - \bar{x})^2$$

$$H = \frac{k}{\sigma^2} S'^2$$

(1) ? k pour que H soit une KHI-DEUX

on a $H = \frac{k}{\sigma^2} S'^2 = \frac{k}{25} \frac{\sum^{26} (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}$

$$H = \frac{k}{25} \sum_{i=1}^{26} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2$$

$$X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$$

$$\frac{X - m}{\sigma} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

$$\sum^{n} \left(\frac{x_i - m}{\sigma} \right)^2 \rightsquigarrow \chi^2(n)$$

a $\sum^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$

donc $\sum_{i=1}^{26} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \rightsquigarrow \chi^2(26-1) = \chi^2(25)$

d'où il faut que $\frac{k}{25} \sum^{26} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} = \sum^{26} \Big(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$

$$\Rightarrow \boxed{k = 25}$$

pour $k = 25 \Rightarrow H = \sum_{i=1}^{26} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \rightsquigarrow \chi($

$E(H) = 25$

$V(H) = 2 \times 25 = 50$

(2) $P\left(L_1 < H = \frac{25\,S'^2}{\sigma^2} < L_2 \right) = 90\%$

Tab $\chi^2(25)$ $P\left(L_1 < H = \frac{25 \times 5}{\sigma^2} < L_2 \right) = 90\%$

$P(H < L_2) = 95\% \Rightarrow L_2 = 37{,}7$

$P(L_1 < H) = 95\% \Rightarrow P(H < L_1) = 5\% \Rightarrow L_1 = 14{,}6$

$\Rightarrow P\left(14{,}6 < \frac{125}{\sigma^2} < 37{,}7\right) = 90\%$

$\Rightarrow P\left(\frac{125}{37{,}7} < \sigma^2 < \frac{125}{14{,}6}\right) = 90\%$

$I_C(\sigma^2) = [3{,}315 ; 8{,}56]$

(3) $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$ $\begin{cases} m \text{ inconnu ?} \\ \sigma^2 \text{ connu} \end{cases}$

$\bar{X} = \frac{1}{26} \sum_{i=1}^{25} x_i = \frac{300}{26}$

$\sigma^2 = 4 \Rightarrow X \rightsquigarrow N(m, 4)$

$\bar{X} \rightsquigarrow N(E(\bar{X}) = \quad , V(\bar{X}) = \quad)$

$\frac{\bar{X} - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \rightsquigarrow N(0,1)$

$P\left(-L_1 < \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} < L_1\right) = 95\%$

$L_1 = 1{,}96 \Rightarrow P\left(-1{,}96 < \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} < 1{,}96\right) = 0{,}95$

$m \in \left[\bar{X} \pm 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

$m \in \left[\frac{300}{26} \pm 1{,}96 \times \frac{2}{\sqrt{26}}\right] = [10{,}76 ; 12{,}3]$

2

$\Rightarrow P(10{,}76 < m < 12{,}30) = 95\%$ Alberta