

MATHEMATIQUES I

Exercice 1 :

(6 points)

Optimiser $f(x, y) = (x - y)^2$ sous la contrainte $g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 9 = 0$

Exercice 2 :

(4 points)

Soit $f(x, y) = \sqrt{x^2 + xy} - x + y$.

- 1- Déterminer et représenter le domaine de f .
- 2- Calculer les dérivées partielles premières de f .

- 4- Donner le développement limité à l'ordre 1 de φ au voisinage de 1.

Problème :

(10 points)

Soit : $f(x, y) = \frac{\ln(x+y)}{x+y}$

- 1- Calculer les dérivées partielles premières de f .
- 2- Donner l'ensemble des points critiques de f .
- 3- Montrer que les dérivées partielles d'ordre 2 sont égales à $\frac{-3+2 \ln(x+y)}{(x+y)^3}$.
- 4- Dédire alors sur quel domaine f est convexe et sur quel domaine f est concave.
- 5- Donner le tableau de variation de $h(t) = \frac{\ln(t)}{t}$.
- 6- Dédire que $f(x, y) \leq e^{-1}$ si $x + y > 0$.
- 7- Soit (x_0, y_0) tel que $x_0 + y_0 = e$, calculer $f(x_0, y_0)$ et en déduire que (x_0, y_0) est un extremum dont on donnera la nature.
- 8- Soit (x_1, y_1) tel que $x_1 + y_1 = e^{5/4}$. Donner l'équation du plan tangent au point $A(x_1, y_1, \frac{5}{4e^{5/4}})$.
- 9- Dédire à partir de la question (4), la position du plan tangent au voisinage de A.

exame

(P1)

Junio 2011

Pb

$$f(u, y) = \frac{\ln(u+y)}{u+y}$$

1)

$$f'_u(u, y) = \frac{\ln(u+y)'(u+y) - \ln(u+y)(u+y)'}{(u+y)^2}$$

Req $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$(\ln(f))' = \frac{f'}{f}$$

$$f'_u(u, y) = \frac{\frac{1}{\cancel{u+y}} (\cancel{u+y}) - \ln(u+y) \times 1}{(u+y)^2}$$

$$= \frac{1 - \ln(u+y)}{(u+y)^2}$$

$$f'_y(u, y) = \frac{\frac{1}{u+y} (u+y) - \ln(u+y) \times 1}{(u+y)^2}$$

$$f'_x(x,y) = \frac{1 - \ln(x+y)}{(x+y)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1 - \ln(x+y)}{(x+y)^2}$$

2) condition 1^e ordre

$$\left. \begin{array}{l} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - \ln(x+y)}{(x+y)^2} = 0 \\ \frac{1 - \ln(x+y)}{(x+y)^2} = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{1 - \ln(x+y)}{(x+y)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \ln(x+y) = 0$$

$$-\ln(x+y) = -1$$

$$\ln(x+y) = 1$$

$$x+y = e^1$$

$$y = e^1 - x$$

2) il existe une infinité de points critiques
Les points critiques: (u, e^{1-u}) avec $u \in \mathbb{R}$

3) Rq $(f^4)' = 4f^3 f'$

$$f'_x(u, y) = \frac{\underbrace{(1 - \ln(u+y))}_{\leftarrow f}}{\underbrace{(u+y)^2}_{\leftarrow g}}$$

$$f''_{xx}(u, y) = \frac{(1 - \ln(u+y))'(u+y)^2 - (1 - \ln(u+y))(u+y)^{2'}}{(u+y)^4}$$

$$= \frac{\underbrace{\frac{(1 - \ln(u+y))}{u+y}}_{\leftarrow f} \cdot \underbrace{2(u+y)^1}_{\leftarrow g} - (1 - \ln(u+y)) \cdot \underbrace{2(u+y)^1}_{\leftarrow g}}{(u+y)^4}$$

$$= \frac{-\cancel{(u+y)} - 2\cancel{(u+y)}(1 - \ln(u+y))}{(u+y)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(u+y)} \left[-1 - 2(1 - \ln(u+y)) \right]}{(u+y)^4}$$

$$= \frac{[-1 - 2 + 2 \ln(u+y)]}{(u+y)^3}$$

2) il existe une infinité de points critiques
les points critiques: $(u, e^1 - u)$ avec $u \in \mathbb{R}$

3) Rq $(f^4)' = 4f^3 f'$

$$f'(u, y) = \frac{1 - \ln(u+y)}{(u+y)^2}$$

$\leftarrow f$
 $\leftarrow g$

$$f''(u, y) = \frac{(1 - \ln(u+y))'(u+y)^2 - (1 - \ln(u+y))(u+y)^{2/1}}{(u+y)^4}$$

$$= \frac{\frac{1 - \ln(u+y)}{u+y} (u+y)^2 - (1 - \ln(u+y)) 2(u+y)^1}{(u+y)^4}$$

$$= \frac{- (u+y) - 2 (u+y) (1 - \ln(u+y))}{(u+y)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(u+y)} [-1 - 2(1 - \ln(u+y))]}{(u+y)^3}$$

$$= \frac{[-1 - 2 + 2 \ln(u+y)]}{(u+y)^3}$$

P5)

f st convex ssi $\ln(n+y) > \frac{3}{2}$

ssi $n+y > e^{3/2}$

~~ssi~~

f st concave ssi $n+y < e^{3/2}$

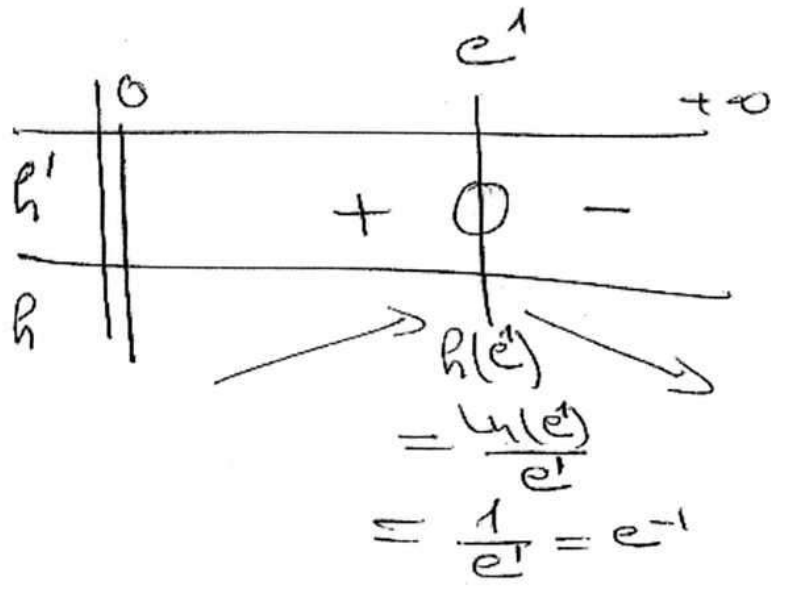
5) $\Rightarrow h(t) = \frac{\ln(t)}{t}$

$$h'(t) = \frac{\ln(t)'t - \ln(t)t'}{t^2}$$

$$= \frac{1/t \cdot t - \ln(t) \cdot 1}{t^2}$$

$$= \frac{1 - \ln(t)}{t^2} \quad ?$$

$1 - \ln(t) = 0$
 $-\ln(t) = -1$
 $\ln(t) = 1$
 $t = e^1$



$$6) \quad h(t) \leq e^{-1}$$

(P₂)

$$f(u+y) = \frac{\ln(u+y)}{u+y} = h(u+y) \leq e^{-1}$$

$$7) \quad u_0 + y_0 = e^1$$

$$f(u_0, y_0) = \frac{\ln(u_0 + y_0)}{u_0 + y_0}$$

$$= \frac{\ln(e^1)}{e^1}$$

$$= \frac{1}{e^1}$$

$$= e^{-1}$$

$$f(u, y) \leq e^{-1} \leq f(u_0, y_0)$$

$$f(u, y) \leq f(u_0, y_0)$$

$\Rightarrow (u_0, y_0)$ est — maximum

8)

$$z = f(u_1, y_1) + f'_u(u_1, y_1)(u - u_1)$$

$$+ f'_y(u_1, y_1)(y - y_1)$$

$$f(x, y_1) = \frac{5}{4e^{5/4}}$$

(K2)

$$f'_x(x, y_1) = \frac{1 - \ln(x + y_1)}{(x + y_1)^2}$$

$$= \frac{1 - \ln(e^{5/4})}{(e^{5/4})^2}$$

$$= \frac{1 - 5/4}{e^{10/4}}$$

$$= \frac{-1/4}{e^{10/4}} = \frac{-1}{4e^{10/4}}$$

$$f'_y(x, y_1) = \frac{-1}{4e^{10/4}}$$

$$z = \frac{5}{4e^{5/4}} - \frac{1}{4e^{10/4}}(x - x_1) - \frac{1}{4e^{10/4}}(y - y_1)$$

$$g] = \frac{5}{4e^{5/4}} - \frac{1}{4e^{10/4}}$$

$$x_1 + y_1 = e^{5/4} < e^{3/2} \Rightarrow \text{concave}$$

