—N680 1ère Statistique - Appliqué

UNIVERSITÉ 7 NOVEMBRE A CARTHAGE
INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DE CARTHAGE

EXAMEN DE LA SESSION PRINCIPALE
Mai 2010

ANNEE : 1 ère	LICENCE FONDAMENTALE DE GESTION L.F.G
Epreuve :	STATISTIQUES & PROBABILITES I
Durée	: 2 HEURES
NB Pages	: 2 PAGES
L'EPREUVE COMPORTE DEUX PARTIES I & II INDEPENDANTES	

PARTIE I : PROBABILITE (10 points) :

Exercice N°1 : (4 points) :

Dans le but de limiter la propagation d'un virus dans une population, une unité médicale a effectué une enquête auprès d'un échantillon de cette population. Elle a constaté que 15% des individus sont contaminés par ce virus.

Sachant que cette unité dispose d'un test de dépistage qui présente les propriétés suivantes :

- Parmi les individus contaminés, le test est positif à 99%.
- Parmi les individus non contaminés, le test est, quand même, positif à 5% d'où le risque d'un mauvais diagnostic.

On désigne par T : l'événement « le test est positif » et par C : l'événement « l'individu est contaminé par un virus » .

Si on choisit un individu de cette population au hasard.

1- Quelle est la probabilité que le test appliqué sur cet individu soit positif ?
2- Sachant que le test appliqué sur cet individu est positif, quelle est la probabilité qu'il soit contaminé ?
3- Calculer la probabilité qu'un individu soit réellement non contaminé sachant que son test est négatif.
4- Calculer la probabilité qu'un individu contaminé ne soit pas dépisté par le test.

Exercice N°2 : (6 points) :

Dans un hypermarché, le temps de réponse du service après vente, suite à une réclamation d'un client, est une variable aléatoire X de densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{\frac{-x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1- Déterminer la constante k pour que f(x) soit une densité de probabilité (d.d.p).
2- Déterminer la fonction de répartition F(x) de la variable aléatoire X.

3- Montrer que la fonction génératrice des moments $M_x(t)$ s'écrit de la manière suivante : $M_x(t) = \frac{1}{1-2t}$ si $t < \frac{1}{2}$

4- Déterminer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X de deux manières différentes.

5- Pour étudier le rendement de ce service, on définit une nouvelle variable aléatoire $Y = \frac{X}{2} - 1$

a- Déterminer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire Y.

b- Déterminer la fonction de répartition de Y. En déduire la densité de probabilité de Y g(y).

PARTIE II : STATISTIQUES DESCRIPTIVES (10 points) :

EXERCICE N°1 (4 points)

Vérifier si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Dans le cas ou la proposition est jugée fausse, proposer la formulation exacte.

1- Le calcul de la fonction de répartition se fait à l'aide des fréquences corrigées lorsque les amplitudes des classes sont différentes.
2- L'unité de mesure de la variance est identique à celle de la variable statistique étudiée.
3- La variance est un indicateur de position de signe positif ou nul.
4- Un indice de Gini proche de 0, indique une faible dispersion de la variable étudiée.
5- Le taux d'accroissement annuel d'une variable économique est toujours positif ou nul.
6- lorsque deux variables économiques présentent des unités de mesure différentes, leur analyse comparative se fait plus facilement par le recours aux indices.
7-On parle de dépression économique lorsque le taux de croissance annuel du PIB est négatif.
8- Un coefficient de variation proche de zéro indique une population homogène.

EXERCICE N°2 (6 points)

Le tableau suivant présente l'évolution d'un indicateur de l'activité touristique en Tunisie, sur la période 2006-2009.

	2006	2007	2008	2009
Nombre d'entrée des non résidents	6549400	6761200	7049800	6901400

Source : Ministère de l'intérieur et du développement local.

1°- Calculer les taux d'accroissement annuels d'entrée des non résidents (touristes) sur la période 2006-2009. Interpréter. (1 point)

2°- Existe-il des années marquées par un fléchissement de l'activité touristique en Tunisie ? Si oui, indiquer les principales raisons. (1 point)

3°- Calculer le taux d'accroissement annuel moyen du nombre d'entrée des non résidents en Tunisie sur la période 2006-2009 (1 point).

4°- Effectuer une prévision du nombre d'entrées des non résidents en Tunisie pour l'année 2010. (1 point).

5°- Quelle hypothèse de croissance de l'activité touristique doit-on faire pour indiquer en quelle année, on peut espérer dépasser le nombre d'entrée de 10000000 de non résidents en Tunisie ? Préciser cette année en effectuant le calcul. (1 point)

6°- Exprimer l'indicateur de l'activité touristique sous la forme d'un indice élémentaire, base 100 en 2006. Interpréter. (1 point)

Correction de la partie I (probabilité) (1)

1ère LCF6 (vérifier les calculs).

Exercice 1 : 4pt

1°) $P(C) = 0,15 \Rightarrow P(\overline{C}) = 0,85$

$P(T|C) = 0,99 \Rightarrow P(\overline{T}/\overline{C}) = 0,01$

$P(T|\overline{C}) = 0,05 \Rightarrow P(\overline{T}/C) = 0,95$

$T = (T \cap C) \cup (T \cap \overline{C})$

$P(T) = P(T \cap C) + P(T \cap \overline{C}) = P(T/C).P(C) + P(T/\overline{C}).P(\overline{C})$

AN $P(T) = 0,99 \times 0,15 + 0,05 \times 0,85 = 0,191$ — 1pt

2°) $P(C|T) = \dfrac{P(T \cap C)}{P(T)} = \dfrac{P(T/C).P(C)}{P(T)}$

0,5 formule
0,5 AN

AN $P(C/T) = \dfrac{0,99 \times 0,15}{0,191} = 0,777$ — 1pt

3°) $P(\overline{C}|\overline{T}) = \dfrac{P(\overline{C} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{P(\overline{T}/\overline{C}).P(\overline{C})}{1 - P(T)}$

0,5 → formule
0,5 → AN

AN $P(\overline{C}|\overline{T}) = \dfrac{0,9\cancel{9} \times 0,95}{1 - 0,191} = \cancel{0,01}$ 0,998 — 1pt

0,5 — Formule
0,5 — AN

4°) $P(C|\overline{T}) = \dfrac{P(C \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{P(\overline{T}/C).P(C)}{1 - P(T)}$

AN $P(C/\overline{T}) = \dfrac{0,01 \times 0,15}{1 - 0,191} = 0,018 \simeq 0,02$ — 1pt

0,5 → formule
0,5 → AN

Exercice 2

1-) $f(x) = \begin{cases} k e^{-\frac{x}{2}} & , \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1-) 1^{er} cdt $\Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$

2^{em} cdt $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{+\infty} k e^{-\frac{x}{2}}\,dx = 1$

$\Rightarrow \left[-2k e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow 2k = 1 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$ 1pt

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2-) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}\,dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ 1

$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{tx} e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x(-t+\frac{1}{2})}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{t-\frac{1}{2}} e^{-x(-t+\frac{1}{2})}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{t-\frac{1}{2}} \Rightarrow M_X(t) = \frac{1}{1-2t}$

$\Rightarrow \boxed{M_X(t) = \frac{1}{1-2t} \quad \text{si } t < \frac{1}{2}}$ 1pt

4°). $\underline{1^{re} \text{ Méthode}}$

$$M_x(t) = \frac{1}{1-2t}$$

$$E(x) = M'_x(t=0) = \frac{2}{(1-2t)^2} = 2 \Rightarrow \boxed{E(x) = 2}$$

$$V(x) = M''_x(t=0) - [M'_x(t=0)]^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$M''_x(t=0) = E(x^2) = \frac{d}{dt} M'_x(t) = \frac{8}{(1-2t)^3}$$

$$M''_x(t=0) = 8 = E(x^2) \Rightarrow V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$V(x) = 8 - 4 = 4 \Rightarrow \boxed{V(x) = 4}$$

0,75pt

$\underline{2^{eme} \text{ Méthode}}$

$$E(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$\left.\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx \\ dv = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx &\Rightarrow v = -e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E(x) = \left[-x e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$E(x) = 0 + \left[-2 e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty} \Rightarrow \boxed{E(x) = 2}$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(x^2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx \Rightarrow u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$$

$$dv = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx \Rightarrow v = -e^{-\frac{x}{2}}.$$

$$E(x^2) = \underbrace{\left[-x^2 e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\frac{x}{2}} dx = 4 \int_0^{+\infty} x \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = 4 \times 2 = \boxed{8}$$

$$V(x) = 8 - 4 \Rightarrow \boxed{V(x) = 4}$$

5) a°) $Y = \frac{X}{2} - 1$

$E(Y) = E\left(\frac{X}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot E(X) - 1 = \frac{1}{2} \times 2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{E(Y) = 0}$ 0,25 pt

$V(Y) = V\left(\frac{X}{2} - 1\right) = \frac{1}{4} V(X) = \frac{1}{4} \times 4 = 1 \Rightarrow \boxed{V(Y) = 1}$ 0,25 pt

b°). $G(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{X}{2} - 1 \leq y\right) = P\left(X \leq \frac{y+1}{2}\right) = F\left(\frac{y+1}{2}\right)$

$x \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} - 1 \geq -1 \Rightarrow \underline{y \geq -1}$

$G(y) = 1 - e^{-\frac{\left(\frac{y+1}{2}\right)}{2}} = 1 - e^{-(y+1)}$

$\Rightarrow g(y) = G'(y) = \frac{dG(y)}{dy} = e^{-(y+1)}$ 1pt

$\Rightarrow g(y) = \begin{cases} e^{-(y+2)} & \text{si } y \geq -1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$