

Exercice 1 : (4 pts)

EXAMEN: JANVIER 2015

Chercher les extrémums de $f(x, y) = x^2 + x y + y^2 - \ln(x + y)$

Sous la contrainte $g(x, y) = x + y + x y - 8 = 0$

Exercice 2 : (4 pts)

1) Chercher a, b et $c \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{-2t}{(2-t)(2+t)(1+t)} = \frac{a}{(2-t)} + \frac{b}{(2+t)} + \frac{c}{(1+t)}$$

2) En posant $t = \sqrt{4-x}$ Calculer

$$I = \int_{-5}^{-12} \frac{1}{x(1+\sqrt{4-x})} dx$$

Exercice 3 : (12 pts)

Soit $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2) - 2x$

- 1) Déterminer et représenter le domaine de f . (noté D_f)
- 2) a) Calculer les dérivées partielles premières de f .
b) Chercher les points critiques de f .
- 3) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .
b) Etudier la convexité de f sur $D = D_f \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$.
c) Déterminer la nature du point critique $(1, 0)$.
- 4) a) Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative de f (notée S_f) au point $(\sqrt{2}, 1, -2\sqrt{2})$.
b) Déterminer la position du plan tangent par rapport à S_f .
- 5) a) Montrer que l'équation $f(x, y) = -2\sqrt{2}$ permet de définir une fonction implicite φ au voisinage du point $(\sqrt{2}, 1)$.
b) Donner le développement limité à l'ordre 1 de $\varphi(x)$ au voisinage de $\sqrt{2}$.
- 6) Chercher les extrémums de f sous la contrainte $g(x, y) = x + 1 = 0$.