Correction d'examen de mécanique générale

Partie 1 : Etude statique :

1) Transfert des torseurs statiques au point A :

- $\{\boldsymbol{\tau}_{12/5}\}_{C\to A}$

On a $\vec{M}_A(\vec{R}_C) = \vec{M}_C(\vec{R}_C) + \overrightarrow{AC}\wedge\vec{R}_C$

$$\Longrightarrow \vec{M}_A(\vec{R}_C) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}L\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}X_C\\Y_C\\Z_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-L\,Z_C\\L\,Y_C\end{pmatrix}$$

D'où : $$\boxed{\{\boldsymbol{\tau}_{12/s}\}_A = \left\{\begin{matrix}\boldsymbol{X_C}\\\boldsymbol{Y_C}\\\boldsymbol{Z_C}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{-L\,Z_C}\\\boldsymbol{L\,Y_C}\end{matrix}\right\}}$$

- $\{\boldsymbol{\tau}_{6/5}\}_{B\to A}$

On a $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{M}_B(\vec{F}) + \overrightarrow{AB}\wedge\vec{F}$

Avec: $\overrightarrow{AB} = -a\vec{x} + e\,\vec{z}_1 = -a\,\vec{x} = -a\,\vec{x} + e\,(cos\alpha\,\vec{z} - sin\alpha\vec{y})$

D'où $\overrightarrow{AB} = -a\vec{x} - e\sin\alpha\;\vec{y} + e\cos\alpha\;\vec{z}$

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-a\\-\,e\sin\alpha\\e\cos\alpha\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\F\sin\beta\\F\cos\beta\end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \begin{pmatrix}-e\sin\alpha\cos\beta - e\,F\cos\alpha\sin\beta\\a\,F\cos\beta\\-\,a\,F\sin\beta\end{pmatrix}$$

D'où $$\{\boldsymbol{\tau}_{6/5}\}_A = \left\{\begin{matrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{F\,sin\,\beta}\\\boldsymbol{F\,cos\,\beta}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{-\,e\,F\,(sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta)}\\\boldsymbol{a\,F\,cos\,\beta}\\\boldsymbol{-a\,F\,sin\,\beta}\end{matrix}\right\}_A$$

2) PFS appliqué sur l'ensemble (S) :

$\{M/S\}_A + \{\tau_{13/s}\}_A + \{\tau_{12/s}\}_A + \{\tau_{6/s}\}_A = \{0\}$

D'où :

$$\left\{\tau_{\frac{M}{S}}\right\}_A = \left\{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}C_m\\0\\0\end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix}0\\Y_A\\Z_A\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix}X_C\\Y_C\\Z_C\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\-L\,Z_C\\L\,Y_C\end{matrix}\right\}_A$$
$$+\left\{\begin{matrix}0\\F\,sin\,\beta\\F\,cos\,\beta\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-\,e\,F\,(sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta)\\a\,F\,cos\,\beta\\-a\,F\,sin\,\beta\end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right\}$$

D'où on obtient le système d'équations suivant :

$X_C = 0$ (1)
$Y_A + Y_C + F\sin\beta = 0$ (2)
$Z_A + Z_C + F\cos\beta = 0$ (3)
Cm$-\ e\,F\,(sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta) = 0$ (4)
$-L\,Z_C + a\,F\cos\beta = 0$ (5)
$L\,Y_C -\ F\sin\beta = 0$ (6)

D'où :
$X_C = 0$ N D'après (1)

$$F = \frac{C_m}{e\ (sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta)}$$ D'après (4)

$Y_C = \frac{a sin\,\beta}{L} F$ D'après (6)

$$Y_C = \frac{a\ sin\ \beta C_m}{eL\ (sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta)}$$

$Y_A = -Y_C - F\sin\beta$ D'après (2)

D'où $Y_A = -\frac{a\ sin\ \beta C_m}{eL\ (sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta)} - \frac{C_m\ sin\ \beta}{e\ (sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta)}$

$$Z_C = \frac{a\ F\cos\beta}{L}$$ D'après (5)

D'où : $Z_C = \frac{a\ C_{m\cos\beta}}{eL(sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta)}$

$Z_A = -Z_C - F\cos\beta = 0$ D'après (3)

D'où : $Z_A = -\frac{a\ C_{m\cos\beta}}{eL(sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta)} - \frac{C_m\ \cos\beta}{e\ (sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta)}$

3) $F = \frac{C_m}{e\ (sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta)} = \frac{C_m}{e\ \sin(\alpha+\beta)}$

4) Etude statique relative à la position PMH ($\alpha = 90°$, $\beta = 0°$)
Avec $\left(L = 51\ mm, a = 48\ mm, e = 20\ mm\ et\ C_m = 3{,}2\ 10^3 N.mm\right)$

Applications numériques :
$F = 160\ N$; $Y_A = 0\ N$; $Z_A = -310,59\ N$; $X_C = 0\ N$; $Y_C = 0\ N$; $Z_C = 150,59\ N$

5) $\|\overrightarrow{R_C}\| = \sqrt{(X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2)} = |Z_C| = 150{,}59N$

$\|\overrightarrow{R_A}\| = \sqrt{(Y_A^2 + Z_A^2)} = |Z_A| = 310{,}59N$

Partie 2 : Etude cinématique :

1) $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{(R_1/R)} = \dot{\alpha}\,\vec{X}$

$\vec{\Omega}_{(R_2/R)} = \dot{\beta}\ \vec{X}$

2)

a. $\vec{V}(C\in 6/R) = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OC}\right)_R$, *avec* $C \in (6)$

D'où $\vec{V}(C\in 6/R) = \left(\frac{d}{dt}\left(e\,\vec{Z}_1 + l\,\vec{Y}_2\right)\right)_R$

$= e\left[\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{Z_1}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \vec{Z}_1\right] + l\left[\left(\frac{d}{dt}\vec{Y}_2\right)_{R_2} + \vec{\Omega}_{(R_2/R)} \wedge \vec{Y}_2\right]$

D'où $\vec{V}(C\in 6/R) = -e\,\dot{\alpha}\,\vec{Y}_1 + l\,\dot{\beta}\,\vec{Z}_2$

b. On a $\vec{Y}_1 = \cos\alpha\,\vec{Y} + \sin\alpha\,\overrightarrow{Z}$

$\vec{Z}_2 = -\sin\beta\,\vec{Y} + \cos\beta\,\overrightarrow{Z}$

$\vec{V}(C\in 6/R) = -e\,\dot{\alpha}\left(\cos\alpha\,\vec{Y} + \sin\alpha\,\overrightarrow{Z}\right) + l\,\dot{\beta}\left(-\sin\beta\,\vec{Y} + \cos\beta\,\overrightarrow{Z}\right)$

D'où $\vec{V}(C\in 6/R) = \left(-e\dot{\alpha}\,\cos\alpha - l\dot{\beta}\,\sin\beta\right)\vec{Y} + \left(l\dot{\beta}\,\cos\beta - e\dot{\alpha}\sin\alpha\right)\overrightarrow{Z}$

c. $-e\dot{\alpha}\,\cos\alpha - l\dot{\beta}\,\sin\beta = 0 \Longrightarrow \vec{V}(C\in 6/R) = \left(l\dot{\beta}\,\cos\beta - e\dot{\alpha}\sin\alpha\right)\overrightarrow{Z}$

3) $\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{C\in 7/R}) = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\boldsymbol{OC}}\right)_{\boldsymbol{R}} = \left(\frac{d}{dt}\,z(t)\vec{\boldsymbol{Z}}\right)_{\boldsymbol{R}} = \dot{z}(t)\,\vec{\boldsymbol{Z}}$

4) $\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{C\in 7/R}) = \vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{C\in 6/R}) \Longrightarrow \dot{z}(t) = l\dot{\beta}\,\cos\beta - e\dot{\alpha}\sin\alpha$

5) $\boldsymbol{\beta} = \cos^{-1}\left(\frac{e}{l}\sin\alpha\right)$ *et* $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dfrac{-\frac{e\dot{\alpha}}{l}\cos\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{e}{l}\sin\alpha\right)^2}}$

$$\dot{z}(t) = -\frac{e\,\dot{\alpha}\,\cos\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{e}{l}\sin\alpha\right)^2}}\,\frac{e}{l}\,\sin\alpha - e\,\dot{\alpha}\,\sin\alpha$$

D'où

$$\dot{z}(t) = -\frac{e^2\,\dot{\alpha}\,\cos\alpha\,\sin\alpha}{\sqrt{l^2 - (e\sin\alpha)^2}} - e\,\dot{\alpha}\,\sin\alpha$$

Alors la loi d'entrée sortie du système s'écrit sous la forme :

$$\dot{z}(t) = -e\,\dot{\alpha}\,\sin\alpha\left(\frac{e\cos\alpha}{\sqrt{l^2 - (e\sin\alpha)^2}} + 1\right)$$

FIN