Devoir de Contrôle

on Considere la fonction. $f(x,y) = (x-y)[\ln x - \ln y$

Partie I 0. determiner et représenter le domaine $\mathfrak{U}$ de f

1. (a) Etudier l'homogénité de f sur $\mathfrak{U}$
   (b) Calculer les dérivées partielles premières de f
   (c) Calculer $xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y)$ et conclure
2. (a) Montrer que l'équation $f(x,y) = Log2$ permet de définir une fonction implicite Φ telle que $\Phi(2) = 1$
   (b) Donner le développement limité à l'ordre 1 de Φ au voisinage de 2

Partie II [5,5 pts = (2+1+0,75+0,75+0,5+0,5) pts]

On considère les ensembles suivants :
$C_0 = \{(x,y) \in \mathfrak{U};\text{ tels que} f(x,y) = 0\}$
$\Omega = \{(x,y) \in \mathfrak{U};\text{ tels que} f(x,y) > 0\}$

1. Déterminer et représenter C_0 et Ω
2. Déduire (sans utiliser les dérivées partielles premières et secondes de f) que si $(x_0,y_0) \in C_0$, alors (x_0,y_0) est un extremum de f
   (x_0,y_0) est-il un extremum global ? (justifier la réponse)
3. (a) Montrer que l'ensemble des points critiques de f est C_0
   (b) Calculer les dérivées partielles secondes de f
4. (a) on désigne par $H_f(x_0,y_0)$ la matrice hessienne de f en un point critique (x_0,y_0) de $\mathfrak{U}$. Montrer que :

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x_0} & \dfrac{-2}{x_0} \\ \dfrac{-2}{x_0} & \dfrac{2}{x_0} \end{pmatrix}$$

   (b) Préciser la nature de chaque point critique de f (utiliser 2)