Session Principale, Janvier 2011

Niveau et Filière	$2^{ème}$ Année LFG
Module	Statistique Inductive
Durée	2 heures
N° de pages	2

NB: 1. **Documents non autorisés.**
2. **Calculatrice autorisée.**
3. **Les résultats sont à arrondir à 2 chiffres après la virgule.**

Exercice 1 : (4 pts)

Soit la suite de n variables aléatoires indépendantes, normales centrées et réduites $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

a) **(1 pt)** Reconnaitre la distribution de la variable aleatoire $X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

b) **(1 pt)** Déterminer l'espérance mathématique de X, en utilisant la propriété d'une somme des variables aléatoires.

c) **(1 pt)** Montrer que $\frac{X-n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{loi} N(0,1)$, sachant que $V[X] = 2n$.

d) **(1 pt)** En déduire pour $n = 50$ une approximation de la probabilité, $P(X \leq 55)$.

Exercice 2 : (6 pts)

Le chiffre d'affaires quotidien d'un commerçant, X, est distribué selon la loi normale de moyenne 1600 dinars et écart-type 400 dinars

a) **(1.5 pts)** Pour un échantillon aléatoire de 16 jours, déterminer la probabilité que le chiffre d'affaires moyen de l'échantillon soit supérieur à 1500 dinars.

b) **(1.5 pts)** Pour un échantillon aléatoire de 16 jours, déterminer le chiffre d'affaires, x, tel que la probabilité que la moyenne de l'échantillon lui soit supérieure soit égale à 0.15.

c) **(1.5 pts)** Pour un échantillon aléatoire de 16 jours, déterminer le chiffre d'affaires y, tel que la probabilité que l'écart-type des chiffres d'affaires de l'échantillon lui soit supérieur soit égale à 0.10. On utilisera la formule suivante pour la variance de l'échantillon : $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$

d) **(1.5 pts)** On considère un échantillon de 4 observations : Quelle est la probabilité que plus que la moitié des chiffres d'affaires observés soient supérieurs à 1500 dinars ?

Exercice 3 : (5 pts)

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d. de X dont la densité de probabilité est :

$$P(X = x) = \frac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!}, \quad x = 0,1,2, \ldots et\ \theta \in \mathbb{R}_+$$

a) **(1.5 pts)** Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\bar{\theta}$ de θ.

b) **(2 pts)** $\bar{\theta}$ est-il sans biais ? est-il convergent ?

c) **(1.5 pts)** Calculer la quantité d'information de Fisher $I_n(\theta)$. $\bar{\theta}$ est-il efficace ?

Statistique inductive — 2LFG

examen Janvier 2011

Corrigé

Ex 1.

a) $X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \rightsquigarrow \chi^2_{(n)}$ tq $X_i \rightsquigarrow N(0,1)$

b) $X_i \rightsquigarrow N(0,1)$ donc $E(X_i) = 0$ et $V(X_i) = 1$

$V(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 \Rightarrow E(X_i^2) = V(X_i) + [E(X_i)]^2$
$= 1 + 0 = 1$

Donc $E(X) = E(\sum X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = n$

c) $X = \sum X_i^2 \rightsquigarrow \chi^2_{(n)}$ donc $E(X) = n$ et $V(X) = 2n$

D'après T.C.L, pr n assez grd, on a :

$$\frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} N(0,1) \quad \text{d'où} \quad \frac{X - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$$

d) $p(X \leq 55) = p\left(\frac{X - 50}{\sqrt{2(50)}} \leq \frac{55 - 50}{\sqrt{100}}\right) = p(Z \leq 0{,}5) = \boxed{0{,}6915}$

Suite ex 2

d) $P(X_i > 1500) = P\left(Z > \frac{1500 - 1600}{400}\right) = P(Z > -0{,}25)$

$= P(Z \leq 0{,}25) = 0{,}5987 = \Phi(0{,}25)$

15

$X_i > 1500 \Rightarrow$ Succès avec $p(S) = 0{,}5987$

La prb pr que plus de 50% du CA soient > 1500 est :

[illegible]

Ex 2

$X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(1600, 400^2)$

$\overline{X}_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(1600, \frac{400^2}{16})$ $E(\overline{X}_n) = 1600$; $V(\overline{X}_n) = 100^2$

a)

$p(\overline{X}_n > 1500) = p\left(\frac{\overline{X}_n - 1600}{100} > \frac{1500-1600}{100}\right)$

$= p(Z > -1) = p(Z \leqslant 1) = 0,8413$

b) $p(\overline{X}_n > x) = 0,15 \Rightarrow p\left(Z > \frac{x-1600}{100}\right) = 0,15$

$\Rightarrow 1 - p\left(Z \leqslant \frac{x-1600}{100}\right) = 0,15 \Rightarrow p\left(Z < \frac{x-1600}{100}\right) = 0,85$

d'après la table, $\frac{x-1600}{100} = 1,036 \Leftrightarrow \boxed{x = 1703,60 \text{ din}}$

c) L'écart-type S_n tq $S^2 = \frac{1}{16-1}\sum_{i=1}^{16}(x_i - \overline{x})^2$

tq $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{(n-1)}$ avec $n = 16$

cherchons y tq $p(S_n > y) = 0,1$

$p(S^2 > y^2) = 0,1 \Rightarrow p\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} > \frac{(n-1)y^2}{\sigma^2}\right) = 0,1$

$\Rightarrow p\left(\chi^2_{(n-1)} > \frac{(n-1)y^2}{\sigma^2}\right) = 0,1 \Leftrightarrow p\left(\underbrace{\chi^2_{(n-1)}}_{\text{tab } \chi^2_{(n-1)}} \leqslant \frac{(n-1)y^2}{\sigma^2}\right) = 0,9$

Or $p(\chi^2_{(15)} \leqslant 22,31) = 0,9$ d'où

$\frac{(15-1)y^2}{400^2} = 22,31 \Leftrightarrow \boxed{y = 487,83}$

(1

ii) ...

[illegible] 1

$$f(x) = \begin{cases} 2kx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2k(4-x) & \text{si } 2 < x \leqslant 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$f(x)$ est une ddp $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^2 2kx\,dx + \int_2^4 2k(4-x)\,dx = 1$$

$$k\left[x^2\right]_0^2 + k\left[8x - x^2\right]_2^4 = 1$$

$$k(4 + 32 - 16 - 16 + 4) = 1 \Rightarrow 8k = 1 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{8}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{x}{4} & \text{si } 2 < x \leqslant 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x}{4}\,dx + \int_2^4 1 - \frac{x}{4}\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{8}\right]_0^2 + \left[x - \frac{x^2}{8}\right]_2^4 = \frac{1}{2} + \left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$$

$$F_2(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{t}{4}\,dt = \left[\frac{t^2}{8}\right]_0^x = \frac{x^2}{8}$$

$$F_3(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt$$

$$= 0 + \left[\frac{t^2}{8}\right]_0^2 + \left[t - \frac{t^2}{8}\right]_2^x = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{8} - 2 + \frac{1}{2}$$

$$= x - \frac{x^2}{8} - 1$$

$$F_4(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^4 f(t)\,dt + \int_4^x f(t)\,dt$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \cancel{4} - \cancel{2} - \cancel{2} + \frac{1}{2} = 1$$

IHEC Carthage

Classe de 2 ème année LFG

Devoir surveillé Ens. Mahmoud Tnani

EXERCICE 1

Soit X la V.A. uniforme sur l'intervalle [0 , 1]. On pose $Y = e^X$

1/ Donner EX et VX .

2/ Calculer Gx(t) , fonction génératrice de X

3/ Exprimer EY et VY à l'aide de Gx.

4/ En déduire EY , EY^2 et VY.

5/ Trouver le loi de la V.A. Y et retrouver EY et VY.

EXERCICE 2

Soit $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ un echantillon formé de n V.A. indépendantes de même loi de d.d.p. définie par :

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\theta}\right)^{x-1} ;\ x \in \mathbb{N}^*$$

On donne EX = θ et VX = θ (θ-1)

1/ Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_{MV}$.

2/ Etudier le biais et la convergence de $\widehat{\theta}_{MV}$.

3/ Calculer l'information de Fisher.

4/ $\widehat{\theta}_{MV}$ est-il efficace ?

2010 - 2011

Exercice 1

$$f(x,\theta) = \frac{3x^2}{\theta} e^{-\frac{x^3}{\theta}} \qquad \forall\, x > 0 \ (\theta > 0)$$

1) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{3t^2}{\theta} e^{-\frac{t^3}{\theta}}\,dt$

$= \left[-e^{-\frac{t^3}{\theta}}\right]_0^x = -e^{-\frac{x^3}{\theta}} + 1 = 1 - e^{-\frac{x^3}{\theta}}$

) $Y = X^3 \quad x > 0 \Rightarrow y > 0$

$G(y) = P(Y < y) = P(X^3 < y) = P(X < y^{1/3}) = F(y^{1/3})$

$= 1 - e^{-\frac{(y^{1/3})^3}{\theta}} = 1 - e^{-\frac{y}{\theta}}$

$g(y) = G'(y) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y}{\theta}}$

donc $Y \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right) \quad E(Y) = \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta \quad V(Y) = \frac{1}{\frac{1}{\theta^2}} = \theta^2$

) Estimateur de MVS :

$\frac{\partial \log L(x,\theta)}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial^2 \log L(x,\theta)}{\partial \theta^2} < 0$

$L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{m} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{m} \frac{3x_i^2}{\theta} e^{-\frac{x_i^3}{\theta}}$

$= \left(\frac{3}{\theta}\right)^m \prod_{i=1}^{m} x_i^2 \; e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{m} x_i^3}$

$L(x,\theta) = m \operatorname{Log} 3 - m \operatorname{Log}\theta + \operatorname{Log} \prod_{i=1}^{m} x_i^2 - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{m} x_i^3$

$\frac{\partial \operatorname{Log} L}{\partial \theta} = -\frac{m}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{m} x_i^3 \qquad \frac{\partial \operatorname{Log} L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{m} x_i^3 = \frac{m}{\theta}$

$\hat{\theta} = \frac{1}{m} \sum^{m} x^3$

Donc vérifier

$$\frac{\partial^2 \log L(x,\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^3$$

$$= \frac{n}{\left(\frac{\sum x_i^3}{n}\right)^2} - \frac{2}{\left(\frac{\sum x_i^3}{n}\right)^3}\sum x_i^3 = \frac{n^3}{(\sum x_i^3)^2} - \frac{2n^3}{(\sum x_i)^2} = -\frac{\theta n^3}{(\sum x_i^3)^2} < 0$$

4) $E(\hat\theta) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) = \frac{1}{n}n\theta = \theta$

$V(\hat\theta) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) = \frac{1}{n^2}\cdot n\theta = \frac{\theta^2}{n}$

car on a $E(Y) = E(X^3) = \theta$

$V(Y) = V(X^3) = \theta^2$

$E(\hat\theta) = \theta$ donc $\hat\theta$ est un estimateur sans biais

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to+\infty} V(\hat\theta) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\theta^2}{n} = 0 \\ E(\hat\theta) = \theta\end{array}\right\}\ \hat\theta \text{ est un estimateur convergent}$$

5) $I_n(\hat\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \log L(x,\theta)}{\partial\theta}\right)$

$$\frac{\partial^2 \log L(x,\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \quad \text{(déterminé de la question 3)}$$

$$-E\left(\frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) = E\left(\frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \frac{n}{\theta^2}\right) = \frac{2}{\theta^3}E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) - \frac{n}{\theta^2}$$

$$= \frac{2}{\theta^3}\times n\theta - \frac{n}{\theta^2} = \frac{2n}{\theta^2} - \frac{n}{\theta^2} = \frac{n}{\theta^2} = \frac{1}{V(\hat\theta)}$$

Donc $\hat\theta$ est un estimateur efficace.

6) $\frac{2Y}{\theta} = \frac{2X^3}{\theta}$

$$Y \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right) \Rightarrow Y \sim \gamma(1,\theta) \Rightarrow \frac{2Y}{\theta} \sim \gamma\left(1, \frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{2}{\theta}}\right) \Rightarrow \frac{2Y}{\theta} \sim \gamma(1,$$

$$\approx \frac{2Y}{\theta} \sim \chi^2(2)$$

$$= \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^{n} Y$$

$$\frac{2Y}{\theta} \sim \chi^2(2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{2Y}{\theta} \sim \chi^2(2n)$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^3$$

$$\frac{2n\hat{\theta}}{\theta} \sim \chi^2(2n)$$

$$P(z_1 < Z < z_2) = 1 - \alpha$$

la loi χ^2 n'est pas symétrique

$P(Z < z_2) = 1 - \alpha_1$ on pose $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$

$P(Z > z_1) = 1 - \alpha_2$

$$\Rightarrow P(Z < z_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$P(Z > z_1) = 1 - P(Z < z_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Z < z_1) = \frac{\alpha}{2}$$

$$z_1 < \frac{2n\hat{\theta}}{\theta} < z_2$$

$$\frac{z_1}{2n\hat{\theta}} < \frac{1}{\theta} < \frac{z_2}{2n\hat{\theta}}$$

$$\Rightarrow \frac{2n\hat{\theta}}{z_2} < \theta < \frac{2n\hat{\theta}}{z_1}$$

$$I_n(\theta) = \left[\frac{2n\hat{\theta}}{z_2} ; \frac{2n\hat{\theta}}{z_1}\right]$$

$\sum x_i^3 = 5100$

$n = 12$ $\quad \alpha = 0,1$

$$P(Z < z_2) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,1}{2} = 0,95 \Rightarrow z_2 = \chi^2(0,95, 24) = 13,8$$

$$P(Z < z_1) = \frac{\alpha}{2} = 0,05 \Rightarrow z_1 = \chi^2(0,05, 24) = 36,48$$

$$I_n(\theta) = [26,91 ; 91]$$

$$\frac{1}{n} \sum x^3 = 40,83$$

*/ Lorsque n est grande TLC

$$\frac{\hat{\theta}-\theta}{\frac{\theta}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}-\theta}{\theta} \sim N(0,1)$$

$$= \sqrt{n}\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}-1\right) \sim N(0,1)$$

$$-a < Z < a$$

$$-a < \sqrt{n}\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}-1\right) < a$$

$$\frac{-a}{\sqrt{n}}+1 < \frac{\hat{\theta}}{\theta} < \frac{a}{\sqrt{n}}+1$$

$$\frac{\hat{\theta}}{\frac{a}{\sqrt{n}}+1} < \theta < \frac{\hat{\theta}}{\frac{-a}{\sqrt{n}}+1}$$

$$I_n(\hat{\theta}) = \left[\frac{\hat{\theta}}{1+\frac{a}{\sqrt{n}}} \; ; \; \frac{\hat{\theta}}{\frac{-a}{\sqrt{n}}+1}\right]$$

$(a < Z < b) = 1-\alpha$ la loi normale centrée réduite est symétrique

on pose $a = b$ avec

$P(-a < Z < a) = 1-\alpha$ [illegible]

$P(|Z| < a) = 1-\alpha \Rightarrow P(Z < a) = 1-\frac{\alpha}{2} = 0,95$

$a_{0,95} = 1,65$

$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3 = \frac{5100}{120} = 42,5$

$I_n(\hat{\theta}) = [36,9 \; ; \; 50,04]$

b) quand $n \nearrow$ l'amplitude de $I \searrow$ c'est plus précis.

$X \sim N(m, \sigma^2 = 25)$

$n = 16$

$$\begin{cases} H_0 : m = 3 \\ H_1 : m = 5 \end{cases}$$

$\bar{X} \geq k$ H_1 est vraie

$\bar{X} < k$ H_0 est vraie

$E(\bar{X}) = m$

$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Risque de 1ère espèce

$= P(\bar{X} \geq k / H_0)$

$P(\bar{X} \geq k) = \alpha \Rightarrow P(\bar{X} \leq k) = 1 - \alpha$

$P\left(\frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \sqrt{n}\frac{k - \alpha}{\sigma}\right) = 1 - \alpha$

$P\left(\sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - m}{\sigma} \leq 4 \times \frac{3,9 - 3}{5}\right) = 1 - \alpha$

$P(Z \leq 0,72) = 1 - \alpha \Rightarrow 1 - \alpha = 0,7642 \Rightarrow \alpha = 0,2358$

Risque de 2ème espèce

$= P(\bar{X} < k / H_1)$

$\bar{X} < k) = \beta$

$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - m}{\sigma} < \sqrt{n}\,\frac{k - m}{\sigma}) = \beta$

$(Z < 4 \times \left(\frac{3,9 - 5}{5}\right)) = \beta$

$P(Z < (-0,88)) = \beta$

$1 - P(Z < 0,88) = \beta$

$(Z < 0,88) = 1 - \beta \Rightarrow 1 - \beta = 0,8106 \Rightarrow \beta = 0,1894$

$\alpha = \beta$

$P(\bar{X} \geq k) = P(\bar{X} < k)$

$P(\bar{X} < k) = P(\bar{X} < k) \Rightarrow 2P(\bar{X} \leq k) = 1 \Rightarrow P(\bar{X} \leq k) = \frac{1}{2}$

$P\left(\sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - m}{\sigma} \leq 4\left(\frac{k-5}{5}\right)\right) = 0{,}5$

$4\left(\frac{k-5}{5}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{k = 5}$

$P(\bar{X} \geq k / H_0) = 0{,}15$

$\Rightarrow P\left(\sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - m}{\sigma} \geq \sqrt{n}\,\frac{k - m_0}{\sigma}\right) = 0{,}15$

$P\left(Z < \sqrt{n}\,\frac{k - m_0}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$

$4\left(\frac{k-3}{5}\right) = 0{,}85 \Rightarrow k = \frac{0{,}85}{4} \cdot 5 + 3 = 4{,}0625$

$P(\bar{X} < k / H_1) = \beta$

$P\left(Z < 4 \cdot \frac{4{,}0625 - 5}{5}\right) = \beta \Rightarrow P(Z < (-0{,}75)) = \beta$

$\Rightarrow 1 - P(Z < 0{,}75) = \beta \Rightarrow P(Z < 0{,}75) = 1 - \beta \Rightarrow 1 - \beta = 0{,}7734$

$\beta = 0{,}2266$

$\eta = 1 - \beta = 1 - 0{,}2266 = 0{,}7734$