



Exercice 1 : (4 pts)

Soit la suite de n variables aléatoires indépendantes, normales centrées et réduites $X_1, X_2, \dots, X_n$.

- (1 pt) Reconnaître la distribution de la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^n X_i^2$.
- (1 pt) Déterminer l'espérance mathématique de X , en utilisant la propriété d'une somme des variables aléatoires.
- (1 pt) Montrer que $\frac{X-n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{loi} N(0,1)$, sachant que $V[X] = 2n$. *7. TCL*
- (1 pt) En déduire pour $n = 50$ une approximation de la probabilité, $P(X \leq 55)$. *Tab*

Exercice 2 : (6 pts)

Le chiffre d'affaires quotidien d'un commerçant, X , est distribué selon la loi normale de moyenne 1600 dinars et écart-type 400 dinars. *calcul*

- (1.5 pts) Pour un échantillon aléatoire de 16 jours, déterminer la probabilité que le chiffre d'affaires moyen de l'échantillon soit supérieur à 1500 dinars.
- (1.5 pts) Pour un échantillon aléatoire de 16 jours, déterminer le chiffre d'affaires, $\bar{x}$, tel que la probabilité que le moyen de l'échantillon lui soit supérieur soit égale à 0.15.
- (1.5 pts) Pour un échantillon aléatoire de 16 jours, déterminer le chiffre d'affaires, $\bar{x}$, tel que la probabilité que l'écart-type des chiffres d'affaires de l'échantillon lui soit supérieur soit égale à 0.10.

On utilisera la formule suivante pour la variance de l'échantillon : $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$.

- (1.5 pts) On considère un échantillon de 4 observations : Quelle est la probabilité que plus que la moitié des chiffres d'affaires soient inférieurs à 1500 dinars ? *calcul*

Exercice 3 : (5 pts)

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ un échantillon i.i.d. de X dont la densité de probabilité est :

$$P(X=x) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \text{ et } \theta \in \mathbb{R}_+$$

- (1.5 pts) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ .
- (2 pts) $\hat{\theta}$ est-il sans biais ? est-il convergent ?
- (1.5 pts) Calculer la quantité d'information de Fisher $I_n(\theta)$. $\hat{\theta}$ est-il efficace ?

Exercice 4 : (5 pts)

Un échantillon aléatoire de 10 étudiants dévoile les temps (exprimés en heures) de révision suivants pour les examens :

28	57	42	35	61	39	55	46	49	38
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Supposons que la population soit la loi normale avec moyenne μ et écart-type σ .

- (1 pt) Déterminer la moyenne et la variance de l'échantillon.
- (2 pts) Tester au seuil de signification de 5% l'hypothèse nulle que la moyenne de la population est égale à 40 heures contre l'hypothèse alternative que la moyenne de la population est supérieure à 40 heures.
- (2 pts) Tester au seuil de signification de 5%, contre l'hypothèse alternative bilatérale l'hypothèse nulle que la variance de la population est égale à 100 heures.

Examen 2012 (SP)

Ex#1

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est d.e. n va iid

$$X \sim N(0, 1)$$

$$(a) \quad X^2 \sim \chi^2(1) \Rightarrow X = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

$$(b) \quad E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = n E(X^2)$$

$$X^2 \sim \chi^2(1) \Rightarrow E(X^2) = 1$$

$$\Rightarrow E(X) = n \times 1 = n$$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = n V(X^2)$$

$$\text{et } X^2 \sim \chi^2(1) \Rightarrow V(X^2) = 2$$

$$V(X) = 2 \times n = 2n$$

$$(c) \quad \text{Mqva } \frac{X - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{L} N(0, 1) \quad \text{avec } V(X) = 2n$$

$$X \xrightarrow{L} \chi^2(n) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(X) = n \\ V(X) = 2n \end{array} \right.$$

$$X = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

X_i suivent la m.l. iid

$$E(X_i) = 0 \quad \text{et } V(X_i) = \sigma^2$$

TCL

pour $n > 30$

$$\frac{\frac{1}{n} \sum X_i^2 - 1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

$$\xrightarrow{L} N(0, 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E(X_i) = 0 \\ V(X_i) = \sigma^2 \end{array} \right.$$

①

liberta

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - n}{\sqrt{\frac{2}{n}}} = \frac{\sum x_i^2 - n}{\sqrt{2n}} \sim N(0,1)$$

(d) Pour $n = 50$ $P(X \leq 55)$

on approxime X à une loi $N(0,1)$

$$P(X \leq 55) = P\left(\frac{X - 50}{10} \leq 0,5\right) = P(Z \leq 0,5)$$

$$Z = \frac{X - 50}{\sqrt{100}} = \frac{X - 50}{10} \sim N(0,1)$$

$$P(Z < 0,5) = 0,6915$$

Ex 2: $X \sim N(1600, \sigma^2 = 400^2)$

(a) X : chiffre d'affaire

$n = 16$, $P(\bar{X} > 1500)$?

$\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i$

loi de $\bar{X}$?

$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i\right) = \frac{16}{16} E(X) = 1600$

car $E(X) = 1600$ ($X \sim N(1600, \sigma^2 = 400^2)$)

$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i\right) = \frac{1}{16^2} \times 16 V(X)$

$X \sim N(1600, \sigma^2 = 400^2)$

$\Rightarrow V(X) = 400^2$

$\Rightarrow V(\bar{X}) = \frac{1}{16} \times 400^2 = 10000$

$\Rightarrow \bar{X} \sim (E(\bar{X}) = 1600, V(\bar{X}) = 10000)$

$Z = \frac{\bar{X} - 1600}{\sqrt{10000}} \sim N(0, 1)$

$P(\bar{X} > 1500) = P\left(\frac{\bar{X} - 1600}{100} > \frac{-100}{100}\right)$

$\Rightarrow P(Z > -1)$

$= P(Z < 1) = F(1)$



$= P(Z < 1)$

Tab $N(0,1)$ $P(\bar{X} > 1500) = 0,84$
 $= 84\%$

①

liberta

$$(b) \quad \underline{n=16} \quad X^2 / P(X < \bar{X}) = 0,15$$

$$\text{avec } \underline{n=16} \quad \bar{X} \sim N(1600, 10000)$$

$$P\left(\frac{X-1600}{100} < \frac{\bar{X}-1600}{100}\right) = 0,15$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{X-1600}{100} < Z\right) = 0,15$$

Tab $N(0,1)$:

$$P\left(Z < \frac{X-1600}{100}\right) = 0,85$$

$$F\left(\frac{X-1600}{100}\right) = 0,85 \Rightarrow \frac{X-1600}{100} = 1,04$$

$$X-1600 = 104 \Rightarrow \boxed{X = 1704}$$

$$(c) \quad n=16, \quad CA = Y^2 / P(Y < \hat{\sigma}) = 0,1$$

$$\text{avec } S'^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{16} (X_i - \bar{X}_n)^2$$

$$X \sim N(m, \sigma^2)$$

$$\sum \left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

$$\Rightarrow \sum \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$P(Y < \hat{\sigma}) = 0,1 \Rightarrow P(Y^2 < \hat{\sigma}^2) = 0,1$$

$$P\left(Y^2 < \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = 0,1$$

$$n=16 \Rightarrow n-1=15$$

$$\Rightarrow P\left(Y^2 < \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{16} (X_i - \bar{X})^2\right) = 0,1$$

libenta

$$P(15Y^2 < \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2) = 0,1$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{15Y^2}{\sigma^2} < \frac{\sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}\right) = 0,1$$

$$Z' = \sum_{i=1}^{16} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(15)$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{15Y^2}{\sigma^2} < Z'\right) = 0,1$$

$$\text{Tab } \chi^2(15) \Rightarrow P\left(\frac{15Y^2}{\sigma^2} < Z'\right) = 0,1$$

$$\Rightarrow \frac{15Y^2}{\sigma^2} = 22,307 \quad \text{et } \sigma^2 = 400^2$$

$$\Rightarrow Y^2 = \frac{(400^2) \cdot 22,307}{15} \Rightarrow Y = 487,79$$

(d) $n=4$

? $\left(\begin{array}{l} \text{si } \sigma^2 \text{ est connue} \\ \text{alors} \end{array} P\left[\frac{1}{\sigma^2} < Z'\right] ?? \right)$

- IP peut-on lui donner $\sigma^{1/2} = ?$

partir

$$P\left(a < n-1 \frac{S^2}{\sigma^2} < b\right) = 1-\alpha$$

↓

$$P\left[\frac{1}{\sigma} > ??\right] = 1-\alpha/2$$

liberté