Institut des Hautes Etudes Commerciales Carthage

IHEC Carthage

Filières : 2ème LFG
Matière : Statistique Inductive
Janvier 2015

2H

Session principale

Exercice 1 (3points)

A l'issue d'une opération de votes pour le choix entre deux candidats A et B, un cabinet de sondages a demandé à 2500 individus le candidat pour lequel ils ont voté. Ils ont dénombré 1421 votes pour A et 1079 votes pour B.

(1) 1/ Donner un intervalle de confiance pour la proportion de votes obtenus pour A, avec un niveau de confiance de 95%.

(1) 2/ Quelle aurait été votre conclusion si on avait obtenu au lieu des chiffres précédents 1222 votes pour A et 1278 pour B ?

Exercice2 (5 points)

Soit X une variable aléatoire de loi normale $N(m, \sigma^2)$ de moyenne et de variance inconnues. Un échantillon de 25 observations a fourni les valeurs suivantes : $\bar{X} = 27{,}5$ et $\sum(X_i - \bar{X})^2 = 231$

(1) 1) Déterminer un intervalle de confiance au niveau 90% pour m.

2) Nous nous proposons de tester l'hypothèse H0 : m = 25 contre l'hypothèse alternative H1 : m = 30

(1) a/ donner la règle de décision pour un risque $\alpha = 5\%$.

(1) b/ quelle est la décision à retenir ?

Exercice 3 (12pts)

On considère la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est :

$$F(x,\theta)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ 1-x^{-\frac{1}{\theta}} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

Où θ est un paramètre de valeur inconnue, $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$.

1) Calculer E(X) et (1)

2) Calculer V(X). (2)

Soit X1, . . . , Xn un échantillon de variables aléatoires indépendantes de même loi que X

3) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$, de θ. 1 + 1

4) On pose Y = ln(X), calculer la loi de Y. En déduire E(Y) et V (Y). 1 + 1 + 1

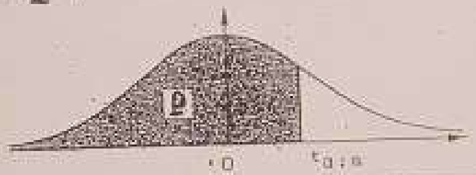
5) En utilisant les résultats de la question 4) Étudier les propriétés de $\hat{\theta}$ (sans biais, convergent, efficace).

1 + 1 + 2

ANNEXE 5 : TABLE DE STUDENT

Fonction de répartition de la loi de Student à n degrés de liberté

$P(T < t_{\alpha;n}) = p$; Ex. : $P(T < t_{0,975;17}) = 0,975 \Rightarrow t_{0,975;17} = 2,110$



n \ p	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0.533	0.860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0.532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0.532	0.858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0.857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0.531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0.531	0.856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0.531	0.855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0.530	0.854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0.530	0.854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0.529	0.851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
60	0,254	0.527	0.848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0.527	0.846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0.526	0.845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0.525	0.843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0.525	0.842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0.524	0.842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

8

Statistique inductive Session Principal 2015 (correction)

Exercice 1 : $n = 2500$, $\alpha = 5\%$.

$$F_n = \frac{1421}{2500} = 0,5684.$$

1ère étape $\quad X \sim \beta(p) \xrightarrow[n=2500>30]{} X \sim N(p, p(1-p))$

$$\Rightarrow F_n \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

2ème étape $\quad \boxed{Z = \frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)}$ $\quad$ 0,5 pt

3ème étape $\quad z_1$ et z_2 \ $P(z_1 < Z < z_2) = 1 - \alpha$

on pose $-z_1 = z_2 = z$

$$F(z) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

$$\Rightarrow z = 1,96.$$

4ème étape

$$-z < Z < z$$

$$-z < \frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < z$$

$$F_n - z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < F_n + z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\boxed{F_n - z\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}} < p < F_n + z\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}} \quad 0,5 pt$$

$$I_C(p) = \left[F_n \pm z\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}\right]$$

$$= \left[0,5684 - 1,96\sqrt{\frac{0,5684 \cdot 0,4316}{2500}} \; , \; 0,5684 + 1,96\sqrt{0,0000981}\right]$$

$$\left]\, 0,5489 \; , \; 0,5878 \,\right[\quad (1 pt)$$

← 1222 votes ⟹ $f_n = 0,4888$ (7)

$Ic(P) = \left[0,4888 \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,4888 \cdot 0,5112}{2500}}\right]$

$= \left[0,4888 \pm 1,96 \sqrt{0,00009,99}\right]$

$\boxed{\left[0,4692 \ , \ 0,50639\right]}$

⟶ On ne peut pas conclure.

1 pt

Exercice 2 : $X \sim N(m, \sigma^2)$

$n = 25$

$\overline{X} = 27,5$

$\sum (x_i - \overline{x})^2 = 231$

1/ $Ic(m) \setminus \sigma^2$ inconnu

1ère étape $\hat{m} = \overline{X}$ $\overline{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

2ème étape $\boxed{Z = \frac{\overline{X} - m}{S/\sqrt{n}} \sim S(n-1)}$ 0,5

3ème étape : z_1 et $z \setminus P(z_1 < Z < z_2) = 1 - \alpha$

on pose $-z_1 = z_2 = z$

$P(-z < Z < z) = 1 - \alpha$

$F(z) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$

$\Rightarrow z = 2,064$

avec $S^2 = \frac{1}{n-1}$

$= \frac{1}{24} \cdot 231$

$= 9,625$

$S = 3,1$

étape

$-z < Z < z$

$-z < \frac{\overline{X} - m}{S/\sqrt{n}} < z$

0,5 $\boxed{\overline{X} - z\,S/\sqrt{n} < m < \overline{X} + z\,S/\sqrt{n}}$

$27,5 - 2,064 \cdot 3,1/5 < m < 27,5 + 2,064 \cdot 3,1/5$

1 pt $\boxed{26,22 < m < 28,779}$

(b) $\Rightarrow I_c(m) = [26,22 \; ; \; 28,779)$

2) $\begin{cases} H_0 : m = 25 \\ H_1 : m = 30 \end{cases}$

$\boxed{RR : \{ (x_1, \dots \; x_n) \setminus \overline{X} > C \}}$ 1 pt

$\alpha = P(R H_0 \setminus H_0 \text{ vrai})$

$= P(\overline{X} > C \setminus m = 25)$

$= 1 - P\left(\frac{\overline{X} - 25}{S/\sqrt{n}} < \frac{C - 25}{S/\sqrt{n}} \right)$

$= 1 - F\left(\frac{C - 25}{3,1/5} \right)$

$\Rightarrow F\left(\frac{C - 25}{3,1/5} \right) = 1 - \alpha = 0,95$

$\Rightarrow \frac{C - 25}{3,1/5} = 1,711$

$\Rightarrow C = 1,711 \cdot \frac{3,1}{5} + 25 = 26,060$

$\boxed{\text{Region Critique} : \{ (x_1, x_2 \dots x_n / \; \overline{x} > 26,060 \}}$ 1 pt

b) $\overline{X} = 27,5 > C = 26,060 \in RC$

$\Rightarrow$ Rejet H_0

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{on Accepte } H_1.}$ 1 pt

... (12pts) (5)

$$F(x,\theta) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ 1 - x^{-\frac{1}{\theta}} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1}{\theta}-1}$$

$$E(X) = \int_1^{+\infty} x\, f(x) = \int_1^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1}{\theta}-1}\, dx$$

$$= \frac{1}{\theta}\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{\theta}}\, dx = \frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{-\frac{1}{\theta}+1} x^{-\frac{1}{\theta}+1}\right]_1^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[\frac{\theta}{\theta-1} x^{-\frac{1}{\theta}+1}\right]_1^{+\infty}$$

$$= \left[\frac{1}{\theta-1} \quad \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}-1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{1-\theta}$$ 1pt

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad avec \quad E(X^2) = \int_1^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$\int_1^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1}{\theta}-1}\, dx = \frac{1}{\theta}\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{\theta}+1}\, dx$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{-\frac{1}{\theta}+2} x^{-\frac{1}{\theta}+2}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\theta}{2\theta-1} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}-2}}\right]_1^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{1-2\theta}$$

$\Rightarrow V(X) = \frac{1}{1-2\theta} - \frac{1}{(1-\theta)^2}$ 2pt

3) $\begin{cases} \frac{\partial \log L(x_1 \cdots x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial^2 \log L(x_1 \cdots x_n, \theta)}{\partial \theta} < 0 \end{cases}$

$(x_1 \cdots x_n, \theta) = \frac{1}{\theta} x_1^{-\frac{1}{\theta}-1} \cdots \frac{1}{\theta} x_n^{-\frac{1}{\theta}-1}$

$= \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{(-\frac{1}{\theta}-1)}$

$\log L(x_1 \cdots x_n, \theta) = n \log \frac{1}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} (-\frac{1}{\theta}-1) \log x_i$ 1pt

$= n \log \frac{1}{\theta} + (-\frac{1}{\theta} - 1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i$

$= -n \log \theta + (-\frac{1}{\theta} - 1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i$

$\frac{\partial \log L(x_1 \cdots x_n, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0$

$\Rightarrow -n\theta + \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0$

$\boxed{\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}{n}}$ 1pt

$\frac{\partial^2 \log L(x_1 \cdots x_n, \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2\sum_{i=1}^{n} \log x_i}{\theta^3} < 0.$

4) $Y = \ln X$

$X > 1$
$\ln x > \ln 1.$
$Y > 0.$

on pose $G(y) = P(Y \leq y) = P(\ln X \leq y) = P(X \leq e^{y}$

$- F(\log 1$

$) = 1 - e^{-\frac{y}{\theta}}$

$g(y) = G'(y) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y}{\theta}}$ si $y \geq 0$ 1pt

$\boxed{y \sim \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\theta}\right)}$

$\boxed{E(y) = \theta}$ 1 $\boxed{V(y) = \theta^2}$ 1

5) $\hat{\theta}$ sans biais

$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\log x_i) = \frac{1}{n} . n E(y) = \theta$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\hat{\theta} \text{ sans biais}}$ 1pt

$\hat{\theta}$ convergent $\lim_{n \to +\infty} V(\hat{\theta}) = 0$?

$V(\hat{\theta}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(\log x_i) = \frac{1}{n^2} . n . V(y)$

$= \frac{\theta^2}{n}$

$\lim_{n \to +\infty} V(\hat{\theta}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\theta^2}{n} = 0$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\hat{\theta} \text{ convergent}}$ 1pt

$\hat{\theta}$ efficace. $I_n(\hat{\theta}) = -E\left(\frac{\partial^2 \log L(x_1, \dots x_n, \theta)}{\partial \theta}\right)$

$-E\left(\frac{n}{\theta^2} - \frac{2\sum_{i=1}^{n} \log x_i}{\theta^3}\right) = -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n\theta}{\theta^3} = \frac{-n\theta + 2n\theta}{\theta^3}$

$= \frac{n\theta}{\theta^3} = \frac{n}{\theta^2}$ 2pt

$V(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{n} = \frac{1}{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{1}{I_n(\theta)} \Longrightarrow \boxed{\hat{\theta} \text{ efficace}}$