



IHEC
Carthage

Institut des Hautes Etudes Commerciales Carthage

Filières : 2^{ème} ANNÉE LFG

Matière : STATISTIQUE

2H

Examen de rattrapage Juin 2013

Exercice 1 (4 points)

Un échantillon de taille n est tiré d'une population normale indépendante d'espérance m et de variance commune θ inconnue. Lesquels des estimateurs suivants de m sont sans biais. Lequel choisir ?

① $\hat{T}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$, $\hat{T}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n-1}$, $\hat{T}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-2} X_i}{n-2}$

Exercice 2 (4 points)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi $N(m, \theta)$, d'espérance m et de variance θ . On dispose de 25 observations indépendantes de la variable X . Les observations ont donné : $\bar{x} = 7$ et $\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 = 49$

1/ Déterminer un intervalle de confiance de niveau 90% pour m lorsque θ est connue et égale à 3,6.

2/ Déterminer un intervalle de confiance de niveau 90% pour m lorsque θ est inconnue.

4 + 6

+ 4

Exercice 3 (6 points)

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant une loi normale d'espérance $E(X) = 0$ et de variance $V(X) = \theta$.

1/ Quelle est la loi de la variable aléatoire

$$T = \frac{X}{\sqrt{\theta}}$$

2/ Déterminer $\hat{\theta}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance.

3/ L'estimateur $\hat{\theta}$ est-il sans biais ?

4/ L'estimateur $\hat{\theta}$ est-il convergent ?

Exercice 4 (6 points)

Soit $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ un échantillon aléatoire i.i.d de taille n régit par une loi normale $N(\mu, \sigma)$, d'espérance $\mu = 11$ et de variance θ .

On pose : $Y = \sum_{i=1}^n (X_i - 11)^2$

$$Y = \sum (x_i - m)^2$$

1) Quelle est la loi de $Z = \frac{1}{\theta} Y$?

2) Un échantillon de taille $n=10$ a fourni le résultat suivant :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - 11)^2 = 100.$$

Construire un intervalle de confiance symétrique de niveau ~~90~~ 90% pour θ .

3) Un autre échantillon a donné les valeurs observées, de la variable X_i suivantes : $\{8; 10; 11; 12; 9; 7; 6; 13; 5\}$.

Proposer un estimateur, $\hat{\theta}$, sans biais de θ ; calculer la valeur de l'estimation de θ donnée par l'échantillon.

4) Déterminer un nouvel intervalle de confiance de niveau ~~90~~ 90% pour θ .

Examen SC 2013
(Stat II)

Ex 1

pour un estimateur sans biais
il faut que $E(\hat{T}) = m$

$$E(\hat{T}_0) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{n}{n} E(X)$$

or $(X_1, \dots, X_n)$: e.s. de VA i.i.d

$X \sim N(m, \theta)$

$$\Rightarrow E(X) = m$$

$$\Rightarrow E(\hat{T}_0) = E(X) = m \Rightarrow \hat{T}_0 \text{ sans biais}$$

$$E(\hat{T}_1) = \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{n}{n-1} E(X) = \frac{nm}{n-1} \neq m$$

donc $\hat{T}_1$ biaisé.

$$E(\hat{T}_2) = \frac{1}{n-2} E\left(\sum_{i=1}^{n-2} x_i\right) = \frac{n-2}{n-2} E(X) = m$$

cl : $\hat{T}_0$ et $\hat{T}_2$ sont des estimateurs de m
qui sont (sans biais)

on choisit entre $\hat{T}_0$ et $\hat{T}_2$

celui qui a la variance la plus petite

est le plus précis

$$V(\hat{T}_2) = V\left(\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} x_i\right) = \frac{(n-2)}{(n-2)^2} V(X) = \frac{\theta}{n-2}$$

$$V(\hat{T}_0) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{n}{n^2} V(X) = \frac{\theta}{n}$$

$$\frac{\theta}{n} < \frac{\theta}{n-2} \Rightarrow \text{on choisit } \hat{T}_0$$

liberta

Ex 2 :

$$X \sim N(\mu, \theta)$$

$$n = 25$$

$$\bar{X} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} X_i = 7$$

$$\sum_{i=1}^{25} (X_i - \bar{X})^2 = 4,9$$

(1) $I_c(\mu)$?

$$X \sim N(\mu, \theta) \Rightarrow \bar{X} \sim N(E(\bar{X}), V(\bar{X}))$$

$$\Rightarrow E(\bar{X}) = 7$$

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} X_i\right) = \frac{1}{25^2} V\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right)$$

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{25} \theta \quad \text{or} \quad \theta = 3,6$$

$$\Rightarrow V(\bar{X}) = 0,144$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim (E(\bar{X}) = 7, V(\bar{X}) = 0,144)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\theta}{n}}} \sim N(0, 1)$$

$$\therefore P(-L_1 < Z < L_1) = 90\%$$

$$P(Z < L_1) = 95\% \Rightarrow L_1 = 1,96 \Rightarrow -L_1 = -1,96$$

$$\Rightarrow P\left(-1,96 < \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\theta}{n}}} < 1,96\right) = 0,9$$

$$\mu \in \left[\bar{X} \pm 1,96 \times \sqrt{\frac{\theta}{n}} \right]$$

$$\mu \in \left[7 \pm 1,96 \times \sqrt{0,144} \right]$$

$$P(6,25 < \mu < 7,74) = 90\%$$

$$\Rightarrow I_c(\mu) = [6,25 ; 7,74]$$

liberta

$$2/ \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 = 4,9$$

$I_C(m)$? θ inconnu

$$\bar{x} \sim N(E(\bar{x}) = 7, V(\bar{x}) = \frac{\theta}{25})$$

θ inconnu $\Rightarrow$ estimer θ

$$X \sim N(m, \theta)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{25} \sum x_i = 7$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2$$

$$\hat{\theta} = s^2 = \frac{4,9}{24} = 0,204$$

$$X \sim N(m, \theta) \Rightarrow \frac{X - m}{\sqrt{\theta}} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{(X - m)^2}{\theta} \sim \chi^2(1) \Rightarrow n = 25$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{25} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\theta} \sim \chi^2(24)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K=24 \frac{s'^2}{\theta} \sim \chi^2(24) \\ L = \frac{\bar{x} - m}{\sqrt{\frac{\theta}{25}}} \sim N(0, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{L}{K} = \frac{\bar{x} - m}{\sqrt{\frac{\theta}{25}}} \sim St(24)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{x} - m}{\sqrt{\hat{\theta}/25}} \sim St(24)$$

$$P(-z_1 < \frac{L}{K} < z_1) = 90\%$$

$$P(\frac{L}{K} < z_1) = 95\% \Rightarrow z_1 = 1,711$$

$$P(-1,711 < \frac{L}{K} < 1,711) = 90\%$$

liberto

$$P \left(-1,711 < \frac{7 - m}{\frac{\sqrt{0,204}}{5}} < 1,711 \right) = 90\%$$

$$m \in \left[7 \pm 1,711 \times 0,09 \right]$$

$$m \in \left[7 \pm 0,154 \right]$$

$$P \left(6,84 < m < 7,154 \right) = 90\%$$

$$I_C(m) = [6,84 ; 7,15]$$

Ex 3: $(X_1, \dots, X_n)$ est une v.a. i.i.d
 $X \sim N(0, \theta)$

(1) $\frac{X-0}{\sqrt{\theta}} \rightsquigarrow N(0, 1) \Rightarrow T = \frac{X}{\sqrt{\theta}} \rightsquigarrow N(0, 1)$

(2) $f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$

$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x_1^2}{2\theta}} \times \dots \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x_n^2}{2\theta}}$

$\Rightarrow L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2}$

$\log L = -\frac{n}{2} (\log 2\pi + \log \theta) - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2$

$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = -\frac{n}{2\theta} + \frac{\sum x_i^2}{2\theta^2} = \frac{-n\theta + \sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta^2}$

$\hat{\theta}_{mvs} \Rightarrow \frac{\partial \log L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow -n\hat{\theta} + \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$

$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$

(3) $E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$

$\Rightarrow E(\hat{\theta}) = \frac{n}{n} E(x_i^2) ?$

$V(X) = E(X - E(X))^2 \quad X \sim N(0, \theta)$

$\Rightarrow V(X) = \theta$

$\Rightarrow E(X - E(X))^2 = \theta$

$\Rightarrow E(X^2) = \theta \Rightarrow E(\hat{\theta}) = \theta$

$\Rightarrow \hat{\theta}$ est Sans biais

liberta

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} E(\hat{\theta}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta = \theta \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\hat{\theta}) ?$$

$$V(\hat{\theta}) = V\left(\frac{1}{n} \sum x_i^2\right) = \frac{1}{n^2} V(\sum x_i^2)$$

$$= \frac{n}{n^2} V(x_i^2)$$

$$X \sim N(0, \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{X - 0}{\sqrt{\theta}} \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{X - 0}{\sqrt{\theta}}\right)^2 \sim \chi^2(1) \Rightarrow Z = \frac{X^2}{\theta} \sim \chi^2(1)$$

$$E(Z) = 1 \text{ et } V(Z) = 2$$

$$\Rightarrow V(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} V\left(\frac{X^2}{\theta} \times \theta\right) = \frac{\theta^2}{n} V\left(\frac{X^2}{\theta}\right)$$

$$\Rightarrow V(\hat{\theta}) = 2 \frac{\theta^2}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V(\hat{\theta}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\theta^2}{n} = 0 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \hat{\theta} \text{ convergent.}$$

Ex 4:

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ es un v.a. i.i.d

$$X \sim N(\mu=11, \sigma^2=9)$$

$$(1) \quad Y = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

$$Z = \frac{1}{\sigma} Y = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

$$X \sim N(\mu=11, \sigma^2=9) \Rightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$Z = \frac{1}{\sigma} Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$$

$$(2) \quad n=10, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - 11)^2 = 100$$

$$I_C(\theta)^2 \quad \mu \text{ known} \quad \mu=11$$

$$S'^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \mu)^2 = \frac{10 S'^2}{\sigma} = \sum_{i=1}^{10} \left[\frac{(X_i - 11)}{\sigma} \right]^2$$

$$M = 10 \frac{S'^2}{\sigma} \sim \chi^2(10)$$

$$P(L_1 < M < L_2) = 90\%$$

$$P(M < L_2) = 95\% \Rightarrow L_2 = 18,3$$

$$P(L_1 < M) = 95\% \Rightarrow P(M < L_1) = 5\%$$

$$L_1 = 3,94$$

$$\Rightarrow P(3,94 < M < 18,3) = 90\%$$

liberto

$$P \left(3,94 < 10 \frac{s'^2}{\theta} < 18,3 \right) = 90\%$$

$$P \left(\frac{10 s'^2}{18,3} < \theta < \frac{10 s'^2}{3,94} \right) = 90\%$$

$$n \quad s'^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - 11)^2 = 10$$

$$\Rightarrow P \left(\frac{100}{18,3} < \theta < \frac{100}{3,94} \right) = 90\%$$

$$\theta \in [5,46 ; 25,38]$$