

1^{ère} année LFSG

Examen de Mathématique I : Analyse

Exercice1(7 points)

- 1) a/ Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction

$$f(x) = \text{Log} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{3x}{1+x}} \right).$$

- b/ Déterminer le développement à l'ordre 2 en $+\infty$ de la fonction $f(x)$. ✕

- 2) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 1 de la fonction

$$g(x) = \frac{\sin(x-1)}{e^x \text{Log} x}.$$

- 3) Calculer $\lim_0 \frac{\text{Log}(1+x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ ✕

Exercice2 (9 points)

On considère la fonction de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} y \sin \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} \right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de f en $(0,0)$.
- 2) Calculer f'_x et f'_y en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.
- 3) Etudier l'existence de f'_x et f'_y en $(0,0)$.
- 4) Etudier l'existence de f''_{x^2} et f''_{y^2} en $(0,0)$. ✕
- 5) Montrer que f est homogène et en déduire une relation entre f'_x et f'_y en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.
- 6) Montrer que f admet une fonction implicite φ au voisinage du point $(1,0)$ et calculer $\varphi'(1)$. ✕

Exercice3 (4 points)

Déterminer les extrémums de

$$2x + y \text{ sous la contrainte: } 2x^2 - 2y + 1 = 0$$