I.H.E.C

MATHEMATIQUES I
$1^{\text{ère}}$ Année
Session de Contrôle Juin 2009

EXERCICE 1 :

Optimiser $f(x, y) = \frac{2}{x} + \frac{3}{y}$ sous la contrainte $g(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2y^2} - \frac{5}{2} = 0$

EXERCICE 2 :

Soit $f(x, y) = (2x - 3y)\,\text{Log}\,(2x - 3y)$

1°) Déterminer et représenter le domaine de f.

2°) a) Calculer les dérivées partielles premières de f.

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

3°) Montrer que f est convexe sur le domaine de f.

4°) Chercher les points critiques de f.

5°) En déduire, à partir de 3 et 4 que : $f(x, y) \geq \frac{-1}{e}$ $\forall (x, y) \in Df$.

6°) On se place au point (5, 3, 0)

a) Déterminer l'équation du plan tangent au point (5, 3, 0).
b) En déduire la position du plan tangent par rapport à la surface représentative de f.
c) Calculer une valeur approchée de $f(5.05 ; 3.03)$..

7°) Optimiser $f(x, y)$ sous la contrainte linéaire $3y - x = 0$.

EXERCICE 3 :

1°) Calculer $I = \int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$

(on pose $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$)

2°) soit $I_n = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

Montrer que $2n\, I_{n+1} = (2n - 1)\, I_n + \frac{x}{(1 + x^2)^n} + C$; $C \in \mathbb{R}$.