

Nom de la loi	DDP	Caractéristiques	Description
Bernoulli $X \sim B(p)$	$P(X=x) = P^x (1-P)^{1-x}$ $E(X) = \sum x P(X=x)$ $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$	$E(X) = P$ $V(X) = P(1-P)$	L'expérience ne se répète pas $X \rightarrow 1 = \text{succès}$ $\rightarrow 0 = \text{échec}$
Binomiale $X \sim B(n, p)$	$P(X=x) = C_n^x P^x (1-P)^{n-x}$	$E(X) = np$ $V(X) = np(1-P)$	$X \rightarrow 1 = \text{succès}$ $\rightarrow 0 = \text{échec}$ l'expérience se répète n fois
Géométrique $X \sim G(p)$	$P(X=x) = P(1-P)^{x-1}$	$E(X) = \frac{1}{P}$ $V(X) = \frac{1}{P^2}$	On répète jusqu'à obtenir la première fois un succès.
Poisson $X \sim P(\lambda)$	$P(X=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$E(X) = \lambda$ $V(X) = \lambda$	Combien de clients je peux servir en une phase de temps
Exponentielle $X \sim P(\lambda)$	$P(X=x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$	le temps nécessaire pour servir les clients
Hypergéométrique $X \sim H(n, N, K)$	$P(X=x) = \frac{C_K^x C_{N-K}^{n-x}}{C_N^n} \times \frac{1}{C_N^n}$		N : Population N_1 : population possédant le caractère N N_2 : population ne possédant pas le caractère N n, K
Uniforme $X \sim U[a, b]$	$f(x) = \frac{1}{b-a}$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$ $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$	

- Hypergéométrique $X \sim H(N, n, K) \xrightarrow{\frac{n}{N} < 0.1} X \sim P(np)$ - Poisson
- Binomiale $X \sim B(n, p) \xrightarrow[n > 30]{np < 15, p < 0.5} X \sim P(n, \frac{K}{n-p})$ - Poisson
- Binomiale $X \sim B(n, p) \xrightarrow[n > 30]{np > 15, np(1-p) > 5} X \sim N(np, np(1-p))$ - Normale
- Poisson $X \sim P(\lambda) \xrightarrow[\lambda > 5]{n \rightarrow +\infty} X \sim N(\lambda, \lambda)$ - Normale

La loi normale: $x_i \sim N(m, \sigma^2)$: $X \rightarrow \begin{cases} E(X) = m \\ V(X) = \sigma^2 \end{cases}$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

La normale centrée Réduite:

① X est une variable centrée $\rightarrow E(X) = 0$

X est une variable non centrée $\rightarrow E(X) = m \neq 0$

Pour centrer une variable, on choisit $Z = X - m \sim E(Z) = 0$

② X est une variable Réduite $\rightarrow V(X) = 1$

X est une variable Non Réduite $\rightarrow V(X) = \sigma^2 \neq 1$

Pour réduire une variable, on choisit $Z = \frac{X - m}{\sigma} = \frac{X}{\sigma}$

③ X est ni centrée, ni réduite $\rightarrow X \sim N(m, \sigma^2) \rightarrow \begin{cases} E(X) = m \neq 0 \\ V(X) = \sigma^2 \neq 1 \end{cases}$

Z est centrée, réduite $\rightarrow Z = \frac{X - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$

Règles Générales

1) $X \sim N(0, 1)$

$X^2 \sim \chi^2_{(1)}$: 1 degré de liberté

$\sum x_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$

$\frac{1}{\sigma^2} \sum (x_i - m)^2 \sim \chi^2_{(n)}$ si $X \sim N(m, \sigma^2)$

2) $X \sim N(0, 1)$

$Y \sim \chi^2_{(n)}$

$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} = \frac{N(0, 1)}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(n)}}{n}}} \sim S_{(n)}$: Student

3) $X \sim \chi^2_{(n_1)}$

$Y \sim \chi^2_{(n_2)}$

$F = \frac{\frac{X}{n_1}}{\frac{Y}{n_2}} = \frac{\chi^2_{(n_1)} / n_1}{\chi^2_{(n_2)} / n_2} \sim F(n_1, n_2)$: Fischer

Loi de $\chi^2_{(n)}$:

$E(X) = n$, $V(X) = 2n$

Loi de Student $St(n)$

$E(X) = \frac{n}{n-2}$

$$4) \begin{aligned} X_i &\sim N(m, \sigma^2) & \Rightarrow & \quad X \sim N(0, 1) \\ \bar{X} &\sim N(m, \frac{\sigma^2}{n}) & & \quad \bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n}) \end{aligned}$$

5) Pour m connue :

$$S^{*2} = \frac{1}{n} \sum (x_i - m)^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

$$E(S^{*2}) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \quad , \quad V(S^{*2}) = \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}$$

Pour m inconnue, σ^2 est connue :

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$$

$$E(S^2) = \sigma^2 \quad V(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$6) X_i \sim N(m, \sigma^2) \quad , \quad \bar{X} \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\frac{\bar{X} - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\bullet \quad X \sim N(0, 1) \quad , \quad \bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$$

$$\frac{\bar{X} - 0}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{n} \bar{X} \sim N(0, 1)$$

$$b) \quad X_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2) \quad \text{et} \quad X_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$$

$$X_1 + X_2 \sim N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$X_1 - X_2 \sim N(m_1 - m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- Exemples :

$$① \quad X_i \sim N(0, 1)$$

$$X^2 \sim \chi^2_{(1)}$$

$$\sum X_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

$$\sum_{i=1}^n N(0, 1)^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

$$② \quad X_i \sim N(m, \sigma^2)$$

$$\frac{X_i - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{(1)}$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

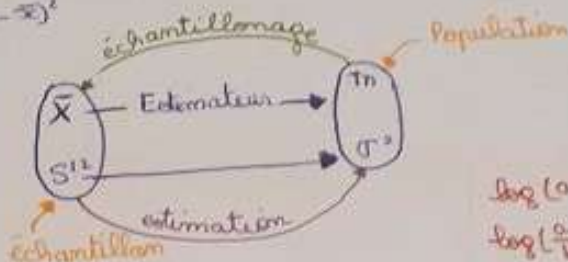
L'estimation

$$E_1(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{cases} \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \\ S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \end{cases}$$

$$E_2(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{cases} \bar{x} \\ S^{1,2} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$E_n(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{cases} \bar{x} \\ S^2 \end{cases}$$



$x_i \rightarrow \text{loi } f(x_i, \theta)$, $\hat{\theta}$ est estimateur de θ .

Sans biais

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

si $E(\hat{\theta}) \neq \theta \rightarrow$ alors on dit que l'estimateur est biaisé

$$\text{le biais} = E(\hat{\theta}) - \theta$$

$$\text{on calcule donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$$

Convergent: $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\hat{\theta}) = 0$

Efficace: $V(\hat{\theta}) = \frac{1}{I_n(\theta)}$

→ borne de Fisher

→ quantité d'information de Fisher

$$\text{on a } I_n(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \log L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta^2}\right)$$

- la fonction de vraisemblance:

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta) \times f(x_2, \theta) \times \dots \times f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

Estimateur de vraisemblance:

$$\frac{\partial \log L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \log L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta^2} < 0$$

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log a^n = n \log a$$

$$\log e^n = n$$

$$\log \frac{1}{a} = -\log a$$

$$\partial \log x = \frac{1}{x}$$

$$\partial \log u = \frac{u'}{u}$$

Intervalle de confiance de m / σ^2 connue.

1^{ère} étape:

$$\hat{m} = \bar{x}$$

$$x_i \sim N(m, \sigma^2)$$

$$\bar{x} \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n})$$

2^{ème} étape:

$$Z = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

3^{ème} étape:

on pose z_1 et z_2 $P(z_1 < Z < z_2) = 1 - \alpha$

niveau de confiance

risque d'erreur

or la loi $N(0, 1)$ est symétrique

$$P(-z < Z < z) = 1 - \alpha$$

$$2F(z) - 1 = 1 - \alpha$$

$$2F(z) = 2 - \alpha \Rightarrow F(z) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow z = T_{N(0, 1)}$$

4^{ème} étape:

$$-z < Z < z$$

$$-z < \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z$$

$$-z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - m < z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-\bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -m < -\bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Intervalle de confiance de σ^2 / m connue :

1^{ère} étape :

$$\hat{\sigma}^2 = S^{12} = \frac{1}{n} \sum (x_i - m)^2$$

2^{ème} étape : $Z = \frac{n S^{12}}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum (x_i - m)^2 \leadsto \chi^2_{(n)}$

3^{ème} étape : z_1 et z_2 tel que $P(z_1 < Z < z_2) = 1 - \alpha$

or la loi χ^2 est non symétrique.

$$P(Z > z_1) = 1 - \alpha_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{on pose } \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2} \\ P(Z < z_2) = 1 - \alpha_2 \end{array} \right.$$

$$P(Z < z_2) = 1 - \alpha_2$$

$$P(Z > z_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = T_{\chi^2_{(n)}, 1 - \frac{\alpha}{2}} \\ z_2 = T_{\chi^2_{(n)}, \frac{\alpha}{2}} \end{array} \right.$$

$$P(Z > z_2) = \frac{\alpha}{2}$$

$$z_2 = T_{\chi^2_{(n)}, \frac{\alpha}{2}}$$

4^{ème} étape :

$$z_1 < Z < z_2$$

$$z_1 < \frac{n S^{12}}{\sigma^2} < z_2$$

$$\frac{z_1}{n S^{12}} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{z_2}{n S^{12}} \Rightarrow \frac{n S^{12}}{z_2} < \sigma^2 < \frac{n S^{12}}{z_1}$$

Intervalle de confiance de m / σ^2 inconnue :

1^{ère} étape :

$$\hat{m} = \bar{X}$$

$$x_i \sim N(m, \sigma^2)$$

$$\bar{X} \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n})$$

2^{ème} étape :

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\bar{X} - m}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \leadsto S_{(n-1)}$$

3^{ème} étape :

$$\text{on pose } z_1 \text{ et } z_2 \mid P(z_1 < Z < z_2) = 1 - \alpha$$

or la loi de student est symétrique.

$$P(-z < Z < z) = 1 - \alpha$$

$$2F(z) - 1 = 1 - \alpha$$

$$F(z) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow z = T_S[(n-1), 1 - \frac{\alpha}{2}]$$

4^{ème} étape :

$$-z < Z < z$$

$$-z < \frac{\bar{X} - m}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} < z$$

$$-z \sqrt{\frac{S^2}{n}} < \bar{X} - m < z \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

$$\bar{X} - z \sqrt{\frac{S^2}{n}} < m < \bar{X} + z \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

Intervalle de confiance de σ^2 / m inconnue

1^{ère} étape: $\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$

2^{ème} étape: $Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum (x_i - \bar{x})^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$

3^{ème} étape: la m (mais χ^2)

4^{ème} étape: $z_1 < Z < z_2$

$z_1 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < z_2$

$\frac{z_1}{(n-1)} S^2 < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{z_2}{(n-1)S^2} \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{z_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{z_1}$

Test d'hypothèse:

H_0 : hypothèse de base

H_1 : Hypothèse alternative.

	H_0	H_1
H_0	Bonne décision	Erreur (α)
H_1	Erreur (β)	Bonne décision

α : Erreur de 1^{ère} espèce = $P(RH_0 | H_0 \text{ vrai})$

β : Erreur de 2^{ème} espèce = $P(RH_1 | H_1 \text{ vrai})$

Région de Rejet:

$\{(x_1, \dots, x_n) \mid \text{où je rejette } H_0\}$

-Exemple 1: Tester m / σ^2 connue:

$\begin{cases} H_0: m=1 \\ H_1: m=2 \end{cases}$ ou seuil $\alpha = 5\%$

$\sigma^2 = 4$, $\sum x_i = 50$, $n = 25$, $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 2$

1^{ère} étape:

RR $\{(x_1, \dots, x_n) \mid \bar{x} > c\}$

2^{ème} étape: Le seuil de rejet

$\alpha = P(RH_0 | H_0 \text{ vraie}) = P(\bar{x} > c \mid m=1)$

$= P(\bar{x} > c \mid m=1)$

$0,05 = 1 - P\left(\frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{c - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \mid m=1\right)$

$P(Z < \frac{c-1}{\frac{2}{\sqrt{25}}}) = 0,95 \Rightarrow F\left(\frac{c-1}{\frac{2}{5}}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{c-1}{\frac{2}{5}} = 1,65 \Rightarrow c =$

3^{ème} étape: Règle de décision:

$c = 1,66 < \bar{x} = 2 \Rightarrow RH_0$

Test de m | σ^2 connue

1^{ère} étape: $RR\{(x_1, \dots, x_n) | \bar{x} > c\}$

Exemple 2: Tester m | σ^2 connue

$$\begin{cases} H_0: m = 25 \\ H_1: m = 30 \end{cases} \quad \alpha = 5\% \quad \sum (x_i - \bar{x})^2 = 231$$

$$n = 25 \quad \bar{x} = 27,5$$

2^{ème} étape: $\alpha = P(RH_0 | H_0 \text{ vraie})$

$$0,05 = P(\bar{x} > c | m = 25)$$

$$0,05 = 1 - P\left(\frac{\bar{x} - 25}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{c - 25}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) \Rightarrow F\left(\frac{c - 25}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) = 0,95$$

$$\Rightarrow \frac{c - 25}{\sqrt{\frac{9,625}{25}}} = 1,66 \Rightarrow c = 26,27$$

3^{ème} étape: Règle de décision

$$c = 26,27 < \bar{x} = 27,5 \Rightarrow RH_0$$

Power d'un test:

$$\eta = 1 - \beta \begin{cases} 1: \text{test puissant} \\ 0: \text{Test non puissant} \end{cases}$$

$$\beta = P(RH_1 | H_1 \text{ vraie})$$

$$= P(\bar{x} < c | m = 30)$$

$$= P\left(\frac{\bar{x} - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{c - 30}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) = F\left(\frac{c - 30}{\sqrt{\frac{9,625}{25}}}\right) = F\left(\frac{26,27 - 30}{\sqrt{\frac{9,625}{25}}}\right)$$

Test de σ^2 | m connue:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 4 \\ H_1: \sigma^2 = 25 \end{cases} \quad n = 25$$

4^{ème} étape: $RR = \{(x_1, \dots, x_n) | S^2 > c\}$

2^{ème} étape: $\alpha = P(RH_0 | H_0 \text{ vraie})$

$$= P(S^2 > c | \sigma^2 = 4)$$

$$= P\left(\frac{n S^2}{\sigma^2} > \frac{cn}{\sigma^2} | \sigma^2 = 4\right) = P\left(\chi_{(n)}^2 > \frac{25c}{4}\right)$$

3^{ème} étape: Règle de décision

$$c = 10,8 \text{ à } P = 0,05 \quad P \propto \sigma^2$$

Méthode des moments :

Moment théorique d'ordre k = moment empirique d'ordre k .

$$E(X^k) = \frac{1}{n} \sum X_i^k$$

Exemple $n=1$: $X \sim B(p)$

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum X_i \Rightarrow \hat{p} = \bar{X}$$

Exemple $n=2$: $X \sim B(n, p)$

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum X_i$$

$$np = \bar{X} \Rightarrow \hat{p} = \frac{\bar{X}}{n}$$

Exemple $n=3$: $X \sim P(\lambda)$

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum X_i \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{X}$$

Exemple $n=4$: $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum X_i$$

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$$

Exemple $n=5$: $X \sim N(m, \sigma^2)$

$$m? \quad E(X) = \frac{1}{n} \sum X_i \Rightarrow \hat{m} = \bar{X}$$

$$\sigma^2? \quad E(X) = \frac{1}{n} \sum X_i$$

$$E(X^2) = \frac{1}{n} \sum X_i^2 \text{ or } V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\Rightarrow E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2 = \sigma^2 + m^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 + m^2 = \frac{1}{n} \sum X_i^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum X_i^2 - m^2 = \frac{1}{n} (\sum X_i^2 - n m^2) = S^{12}$$

$$\text{or } S^{12} = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) = \frac{1}{n} (\sum X_i^2 - 2\bar{X} \sum X_i + n\bar{X}^2)$$

$$= \frac{1}{n} (\sum X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2) = \frac{1}{n} (\sum X_i^2 - n\bar{X}^2) = \frac{1}{n} (\sum X_i^2 - n m^2)$$

Intervalle de confiance de $m_1 - m_2$ \ σ_1^2 et σ_2^2 connues

1^{ère} étape: $m_1 - m_2 = \bar{X} - \bar{Y}$

$$X_i \sim N(m_1, \sigma_1^2) \quad \text{et} \quad Y_i \sim N(m_2, \sigma_2^2)$$

$$\bar{X} \sim N(m_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}) \quad \text{et} \quad \bar{Y} \sim N(m_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \rightsquigarrow N(m_1 - m_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

2^{ème} étape: $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow N(0, 1)$

3^{ème} étape: on pose z_1 et z_2 \ $P(z_1 < Z < z_2) = 1 - \alpha$

or la loi $N(0, 1)$ est *symétrique*.

$$\Rightarrow P(-z < Z < z) = 1 - \alpha \Rightarrow F(z) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$z = T_{N(0, 1)}$$

4^{ème} étape: $-z < Z < z \Leftrightarrow -z < \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z$

$$(\bar{X} - \bar{Y}) - z \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < m_1 - m_2 < (\bar{X} - \bar{Y}) + z \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

• Intervalle de confiance de m_1 et m_2 \ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ inconnue

$$(X_1, \dots, X_n) \rightsquigarrow N(m_1, \sigma^2)$$

$$(Y_1, \dots, Y_n) \rightsquigarrow N(m_2, \sigma^2)$$

1^{ère} étape: $\bar{X} \rightsquigarrow N(m_1, \frac{\sigma^2}{n})$ et $\bar{Y} \rightsquigarrow N(m_2, \frac{\sigma^2}{n})$

$$\bar{X} - \bar{Y} \rightsquigarrow N(m_1 - m_2, \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2})$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \rightsquigarrow N(m_1 - m_2, \sigma^2 (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}))$$

2^{ème} étape: $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (m_1 - m_2)}{\sqrt{S^{*2} (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\sigma^2 (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \rightsquigarrow N(0, 1) \rightsquigarrow S_{(n_1 + n_2 - 2)}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{S^{*2}}{\sigma^2}}} \sim \sqrt{\frac{\chi^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$\text{or } S^{*2} = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\frac{S^{*2}}{S^2} = \left(\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{S^2} + \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{S^2} \right) \sim \chi^2_{(n_1+n_2-2)} \rightarrow \frac{\chi^2_{(n_1+n_2-2)}}{n_1+n_2-2}$$

3^{ème} étape: on pose z_1 et z_2 | $P(z_1 < Z < z_2) = 1 - \alpha$

or la loi de Student est asymétrique.

$$P(-z < Z < z) = 1 - \alpha$$

$$F(z) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$z = T_{S^2_{(n_1+n_2-2)}, 1 - \frac{\alpha}{2}}$$

4^{ème} étape: $-z < Z < z$

$$-z < \frac{\bar{x} - \bar{y} - (m_1 - m_2)}{\sqrt{S^{*2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} < z$$

$$\bar{x} - \bar{y} - z \sqrt{S^{*2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} < m_1 - m_2 < \bar{x} - \bar{y} + z \sqrt{S^{*2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

Intervalle de confiance de la population

$$X \sim B(p) \xrightarrow{n > 30} X \sim N(p, p(1-p))$$

1^{ère} étape: $\hat{p} = \bar{x}$ $\bar{x} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$

2^{ème} étape: $Z = \frac{\bar{x} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$

3^{ème} étape: on pose z_1 et z_2 | $P(z_1 < Z < z_2) = 1 - \alpha$

la loi $N(0,1)$ est Symétrique

$$P(-z < Z < z) = 1 - \alpha \Rightarrow F(z) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$z = T_{N(0,1)}$$

4^{ème} étape: $-z < Z < z \Rightarrow -z < \frac{\bar{x} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < z$

$$\bar{x} - z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \hat{p} < \bar{x} + z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\bar{x} - z \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} < \hat{p} < \bar{x} + z \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}$$

- Théorème Centrale limite :

$$X \sim \chi^2_{(n)} \xrightarrow{n > 30} X \sim N(n, 2n)$$

$$X \sim S^T_{(n)} \xrightarrow{n > 30} X \sim N(0, \frac{n}{n-2})$$

$$X \sim P(\lambda) \xrightarrow[\lambda > 5]{n > 30} X \sim N(\lambda, \lambda)$$

Formulaire pour le calcul intégral.

1 Dérivées des fonctions usuelles.

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Domaine
k	0	$I = \mathbb{R}$
x	1	$I = \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$I = \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$I = \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N} - \{1\}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$I =]0, +\infty[$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$I =]0, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$I =]0, +\infty[$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$I =]0, +\infty[$
e^x	e^x	$I = \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$I = \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$I = \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$I =]-\pi/2, \pi/2[$

2 Opérations sur les dérivées.

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Domaine
$f(x) = u(x)v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	
$f(x) = \frac{1}{u(x)}$	$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$	$u \neq 0$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$	$v \neq 0$
$f(x) = u \circ v(x) = u(v(x))$	$f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = v'(x) \times u'(u(x))$	
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$u \geq 0$
$f(x) = \ln(u(x))$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	$u > 0$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$	
$f(x) = u^n(x)$	$f'(x) = nu'(x)u^{n-1}(x)$	$u \geq 0$

3 Primitives des fonctions usuelles.

Fonction $f(x)$	Primitives $F(x)$	Domaine
k	$kx + c$	$I = \mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2} + c$	$I = \mathbb{R}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$I = \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + c$	$I = \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N} - \{1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + c$	$I =]0, +\infty[$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$I =]0, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$I =]0, +\infty[$
e^x	$e^x + c$	$I = \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$I = \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$I = \mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + c$	$I =]-\pi/2, \pi/2[$

4 Primitives des fonctions composées.

Formule de base avec des fonctions f et u et F primitive de f : $(F(u(x)))' = u'(x) f(u(x))$.

Fonction $f(x)$	Primitives $F(x)$	Domaine
$g(ax+b)$	$\frac{1}{a} G(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$u'(x)u^n(x)$	$\frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x)) + c$	où $u \neq 0$
$u'(x)u^\alpha(x)$	$\frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$	où $u \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + c$	où $u > 0$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$	$\mathbb{R}$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + c$	$\mathbb{R}$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + c$	$\mathbb{R}$

5 Intégration par parties.

Formule d'intégration par parties.

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Formule de primitivation par parties.

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$

3 Primitives des fonctions usuelles.

Fonction $f(x)$	Primitives $F(x)$	Domaine
k	$kx + c$	$I = \mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2} + c$	$I = \mathbb{R}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$I = \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + c$	$I = \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N} - \{1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + c$	$I =]0, +\infty[$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$I =]0, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$I =]0, +\infty[$
e^x	$e^x + c$	$I = \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$I = \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$I = \mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + c$	$I =]-\pi/2, \pi/2[$

4 Primitives des fonctions composées.

Formule de base avec des fonctions f et u et F primitive de f : $(F(u(x)))' = u'(x)f(u(x))$.

Fonction $f(x)$	Primitives $F(x)$	Domaine
$g(ax+b)$	$\frac{1}{a}G(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$u'(x)u^n(x)$	$\frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x)) + c$	où $u \neq 0$
$u'(x)u^\alpha(x)$	$\frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$	où $u \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + c$	où $u > 0$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$	$\mathbb{R}$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + c$	$\mathbb{R}$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + c$	$\mathbb{R}$

5 Intégration par parties.

Formule d'intégration par parties.

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Formule de primitivation par parties.

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$

Formulaire pour le calcul intégral.

1. Dérivées des fonctions usuelles.

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Domaine
c	0	$I = \mathbb{R}$
x	1	$I = \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$I = \mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$I = \mathbb{R}^* \text{ si } n \in \mathbb{N} - \{1\}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$I =]0, +\infty[$
x^a	ax^{a-1}	$I =]0, +\infty[\text{ si } a \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$I =]0, +\infty[$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$I =]0, +\infty[$
e^x	e^x	$I = \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$I = \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$I = \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$I =]-\pi/2, \pi/2[$

2. Opérations sur les dérivées.

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Domaine
$f(x) = u(x)v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	
$f(x) = \frac{1}{u(x)}$	$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$	$u \neq 0$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$	$v \neq 0$
$f(x) = u + v(x) = u + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x) = u'(x) + v'(x)$	
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$u \geq 0$
$f(x) = \ln(u(x))$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	$u > 0$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$	
$f(x) = u^n(x)$	$f'(x) = nu'(x)u^{n-1}(x)$	$u \geq 0$

3. Primitives des fonctions usuelles.

Fonction $f(x)$	Primitives $F(x)$	Domaine
k	$kx + c$	$I = \mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2} + c$	$I = \mathbb{R}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$I = \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{n-1} x^{n-1} + c$	$I = \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N} - \{1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$I =]0, +\infty[$
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$	$I =]0, +\infty[$ et $a \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$I =]0, +\infty[$
e^x	$e^x + c$	$I = \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$I = \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$I = \mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + c$	$I =]-\pi/2, \pi/2[$

4. Primitives des fonctions composées.

Formule de base avec des fonctions f et u et F primitive de f : $(F(u(x)))' = u'(x) f(u(x))$

Fonction $f(x)$	Primitives $F(x)$	Domaine
$g(ax+b)$	$\frac{1}{a} G(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$u'(x)u^n(x)$	$\frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + c$	où $u \neq 0$
$u'(x)u^a(x)$	$\frac{u^{a+1}(x)}{a+1} + c$	où $u \neq 0$ et $a \in \mathbb{R} - \{-1\}$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + c$	où $u > 0$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$	$\mathbb{R}$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + c$	$\mathbb{R}$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + c$	$\mathbb{R}$

5. Intégration par parties.

Formule d'intégration par parties.

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)u'(x)dx$$

Formule de primitivation par parties.

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$