I.H.E.C – Carthage	Série n°1	1er L.F.G.

Exercice n°1 :

On considère dans $M_n(IR)$ les matrices A et B définies par : $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ $avec\ a_{ij} = i + j$ et

$B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ $avec\ b_{ij} = i - j$

1) a. Déterminer A et B
   b. Déterminer A et B dans le cas où (n=3)
2) On pose D= A-B et S =A+B ; P=A.B et Q=B.A
   a. Déterminer D et S
   b. Dans le cas où (n=3) calculer P et Q.

Exercice n°2 :

Soit A, B, C et D les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}\ C = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\ D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont définies ? calculer celles qui sont définies.
   A+B ; A+C ; A.B ; B.A ; CD ; DC et D^2
2) Déterminer la matrice X telle que BA+2C+X=O (O est la matrice nulle).

Exercice n°3 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $et\ J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}$ où $(\alpha \in IR)$

1) Déterminer A^n $pour\ tout\ n \in IN^*$
2) a. Montrer que $\forall\ n \in IN^*\ A^n.J = J.A^n = J$
   b. Calculer J^n $(n \in IN^*)$
   c. Montrer que $\forall\ n \in IN^*\ \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k 3^{n-k-1}.\alpha^k = \frac{(\alpha+3)^n - \alpha^n}{3}$
3) En déduire B^n.

Exercice n°4 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0$
2) Déduire que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A et I puis expliciter A^{-1}.

Exercice n°5 :

1) Déterminer la matrice $M \in M_2(IR)$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
2) Déterminer alors les matrices $X \in M_2(IR)$ telle que $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ on pourra poser $N = X - I_2$.

Exercice n°6 :

Soient $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = B + I\ et\ A = 3B + I$

1) Calculer B.C ; Déduire B^n $où\ n \in IN^*$.
2) Montrer que $\forall n \in IN^*\ A^n = I + (1-(-2)^n).B$. Expliciter A^n. Puis déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

Exercice n°7 :

Soit la matrice d'ordre 2 définie par $M_a = \begin{pmatrix} 1+a & -a \\ -2a & 1+2a \end{pmatrix}_{a\in IR}$.

1) Montrer que M(a).M(b)=M(c) où c est un réel tel que l'on exprimera à l'aide de a et b. Que dire de M(0) ?.
2) Déterminer les réels a pour lesquels M(a) est inversible. Puis préciser son inverse dans le cas où elle l'est.
3) On pose A=M(1)
   a. Montrer que A.M(a)=M(1+4a)
   b. En déduire que les puissances n^{ièmes} de A (A^n) sont toutes de la forme $A^n = M(U_n)$ où $U_n = 1 + 4U_{n-1}$ $et\ U_1 = 1$
   c. On pose $V_n = U_n + \frac{1}{3}$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on calculera son terme général V_n en fonction de n.
   d. Déduire A^n $où\ n \in IN^*$.

Exercice n°8 :

Soit $M = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\beta}{\alpha} & \frac{\gamma}{\alpha} \\ \frac{\alpha}{\beta} & -\frac{1}{2} & \frac{\gamma}{\beta} \\ \frac{\alpha}{\gamma} & \frac{\beta}{\gamma} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in (IR^*)^3$

Soit $A = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\beta} \\ \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}.(a, b, c)$ où $(a, b, c) \in IR^3$

1) Déterminer a, b et c pour que $A = M - I_3$.
2) Calculer M^2 et déduire que M est inversible et déterminer son inverse M^{-1}.
3) Calculer A^n où $n \in IN^*$.

Série n° = 1

Exercice 1.

$A\,(a_{ij})$

$a_{ij} = i + j$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & (n+1) \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & (n+2) \\ \vdots & & & & \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{pmatrix}$$

$b_{ij} = i - j$

$b_{1n} = 1 - n$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & -1 & -2 & \cdots & 1-n \\ 1 & b_{22} & \cdots & \cdots & 2-n \\ 2 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ n-1 & & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$S = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$P = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 2 & -7 \\ 14 & 2 & -10 \\ 17 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$

Exercice 1:

$$1/\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & b & c & c \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix}$$

$L_2 = L_2 - L_1$
$L_3 = L_3 - L_1$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$$

$$a(b-a) \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & \alpha-a \end{vmatrix}$$

$$= a(b-a) \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & \alpha-b \end{vmatrix}$$

$$= a(b-a)\left[(c-b)(d-b) - (c-b)^2\right]$$

$$= a(b-a)(c-b)(\alpha \cancel{-b} - c \cancel{+b})$$

$$= a(b-a)(c-b)(\alpha - c)$$

2/ $546 = 13 \times 42$
$273 = 13 \times 21$
$169 = 13 \times 13$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 12 \\ 6 & 3 & 9 & -3 \\ 4 & 7 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 12 \\ 546 & 273 & 169 & -13 \\ 4 & 7 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 12 \\ 13\times 42 & 13\times 21 & 13\times 13 & 13\times(-1) \\ 4 & 7 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

2

$$= 13 \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 12 \\ 42 & 21 & 13 & -1 \\ 4 & 7 & 6 & -1 \end{vmatrix}}_{q \in \mathbb{Z}} = 13 . q$$

$\Longrightarrow$ D est divisible par 13

3/ $$f(x) = \begin{vmatrix} g(x) & k(x) \\ h(x) & l(x) \end{vmatrix} = gl - hk$$

$$f'(x) = g'l + gl' - h'k - hk'$$

$$\begin{vmatrix} g' & k \\ h' & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g & k' \\ h & l' \end{vmatrix} = g'l - h'k + gl' - hk'$$
$$= f'$$