I.H.E.C – Carthage	**Série n°2**	**1er L.F.G.**

Exercice n°1 :

1) Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2a & 2b & b-c \\ 2b & 2a & a+c \\ a+b & a+b & b \end{vmatrix} \qquad \Delta_5 = \begin{vmatrix} b+c & b & c \\ c & c+a & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix}$$

2) Sachant que 546 ; 273 et 169 sont des entiers divisibles par 13 montrer que le déterminant suivant est divisible par 13 sans le calculer.

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 12 \\ 6 & 3 & 9 & -3 \\ 4 & 7 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

3) a- g, h, k *et* l étant des fonctions définies dérivables sur IR, on pose : $f(x) = \begin{vmatrix} g(x) & k(x) \\ h(x) & l(x) \end{vmatrix}$

Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \begin{vmatrix} g'(x) & k(x) \\ h'(x) & l(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g(x) & k'(x) \\ h(x) & l'(x) \end{vmatrix}$

b- Généraliser à un déterminant d'ordre 3.

c- Application : Calculer $d(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & x \\ x & x+a_2 & x \\ x & x & x+a_3 \end{vmatrix}$

Exercice n°2 :

1) Déterminer le rang de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & -7 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice n°3 :

On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que A et B sont inversibles et déterminer leurs inverses.
2) Déterminer la matrice X telle que : $A.X.B = C$

Exercice n°4 :

1) On donne le système $(S)\begin{cases} x+y+z=a \\ 2x+y+z=b \\ x+2y+z=c \end{cases}$ où a ; b et c des réels.

a- Résoudre (S)

b- Déduire que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donner A^{-1}

2) a- Discuter l'existence et le nombre de solutions des systèmes :

$$(S_a)\begin{cases} (1-a)x+2y-z=0 \\ -2x-(a+3)y+3z=0 \\ x+y-(a+2)z=0 \end{cases} \qquad (S_m)\begin{cases} x+y+(2m-1)z=1 \\ mx+y+z=-1 \\ x+my+z=3(m+1) \end{cases} \quad (m \in IR)$$

b- Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x+3y+4z+7t=b_1 \\ x+3y+4z+5t=b_2 \\ x+3y+3z+2t=b_3 \\ x+y+z+t=b_4 \end{cases} \quad b_1, b_2, b_3 \textit{ et } b_4 \textit{ sont des réels } \text{(discuter)} \quad (S_2)\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+2z-3t=2 \\ 2x+4z+4t=3 \\ 2x+2y+3z+8t=2 \\ 5x+3y+9y+19t=6 \end{cases}$$

Exercice n°5 :

$a \in IR$ on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ et le système linéaire $(S)\begin{cases} ax+y+z+t=1 \\ x+ay+z+t=1 \\ x+y+az+t=1 \\ x+y+z+at=1 \end{cases}$

x, y, z et t sont inconnues.

1) Discuter le rang de A suivant les valeurs de a.
2) Pour quelles valeurs de a le système (S) est-il de Gramer ? compatible ? incompatible ?
3) Lorsqu'il est de Gramer, résoudre (S).

FIN