Exercice n°6 :

Soit f définie sur IR^2 par $f(x,y) = \frac{1}{2}y^2.e^{x-1} - \frac{1}{2}x - y$

1) Déterminer l'unique point critique M_0 $de\ f\ sur\ IR^2$.
2) Déterminer la nature de M_0, f est-elle convexe ?
3) Ecrire le développement limité à l'ordre 2 de f au point *(1, -2)*. Préciser l'équation du plan tangente à (C_f) au point $(1,-2,f(1,-2))$ et la position du plan avec (C_f).
4) Déterminer une valeur approchée de $f(0.9\,;-1.95)$.
5) a- Calculer $e(f/x)(1,-2)$; $e(f/y)(1,-2)$.

   b- On suppose que les variations relatives de x et y vérifient $\frac{\Delta x}{x} = \frac{2}{3}.\frac{\Delta y}{y}$.

   si f augmente de 2% à partir de (1, -2), déterminer les variations relatives de x *et* y qui ont provoqué ce changement.

Exercice n°7 :

Etudier l'existence et la nature des extrémums de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \ln(e^x + e^y)$
b) $f(x,y) = (1 + y + xy + ax^2)e^y$ où $a \in IR\backslash\left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$ (discuter).
c) $f(x,y) = a(x^2 + y^2) + xy + y - x - 1$ $(a \in IR)$ (discuter).
d) $f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$.
e) $f(x,y) = -x^2 - axy - y^2 + 2y$ où $(a \in IR)$ (discuter).
f) $f(x,y) = e^{1+ax}.(x + y^2)$ discuter suivant a.
g) $f(x,y) = x(y^2 + (\ln x)^2)$
h) $f(x,y) = e^{x+y} + e^{-x} + e^{-y}$.

Exercice n°8 :

Etudier l'existence des extrémums de chacune des fonctions sous les contraintes indiquées.

1) $f(x,y) = x^2 + y$ $\quad g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$
2) $f(x,y) = -x^2 + 4y^2$ $\quad g(x,y) = x + 2y^2 - 2 = 0$
3) $f(x,y) = \ln(xy)$ $\quad g(x,y) = 2x + 3y = 5$
4) $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ $\quad g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$

FIN

Exercice 2 :

$* \; g(x,y) = f(x+y)$

$h(x,y) = x+y$

$g(x,y) = f\left[h(x,y)\right]$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f' \cdot \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + f' \cdot \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2 f'(h(x$

2

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2 f'\left(h(x,y)\frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

$$= 2 f'\left(h(x,y)\right)$$

$$* \; h(x,y) = f(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2 f' \cdot 2x$$

(

2

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y - \frac{1}{2} + \frac{e^y}{e^x + e^y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + \frac{e^x(e^x + e^y) - e^x \cdot e^x}{(e^x + e^x)^2}$$

$$= 2 + \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2 + e^x \cdot \frac{-e^y}{(e^x + e^y)^2} = 2 - \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = 2 + \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$$

$$\det Hf = \left[2 + \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\right]^2 - \left[2 - \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\right]^2$$

$$= \frac{8e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$$

$\det Hf > 0$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial x}(x,y) > 0$ sur $\mathbb{R}^2$

d'où f est convexe sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 3 :

$$U(x,y) = x^2 + 3 , V(x,y) = 2x + \sqrt{y} - \frac{1}{8}$$

$$f(U,V) = (U+V)^4 + V$$

$$g(x,y) = f\left[U(x,y), V(x,y)\right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= 4\left(x^2 + 2x + \sqrt{y} + \frac{23}{8}\right) \cdot 2x +$$

$$\left(4\left(x^2 + 2x + \sqrt{y} + \frac{23}{8}\right) + 1\right) \cdot 2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(U,V) = \frac{\partial f}{\partial U} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$= \left(4\left(x^2 + 2x + \sqrt{y} + \frac{23}{8}\right) + 1\right) \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Exercice 5:

1/ $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$, $Df = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

Soit $t > 0$

$$f(tx,ty) = e^{\frac{tx}{ty}} = e^{\frac{x}{y}} = t^0 . f(x,y)$$

D'où f est homogène de degré 0.

2/ $$e f_{/x}(x,y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f(x,y)} . x$$

$$= \frac{\frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}}{e^{\frac{x}{y}}} . x = \frac{x}{y}$$

* On a f est homogène de degré P

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = P \cdot f(x,y)$$

$$\frac{x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}}{f(x,y)} + \frac{y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}}{f(x,y)} = P$$

$$ef_{/x}(x,y) + ef_{/y}(x,y) = P$$

Or on a f est homogène de degré 0

$$\Rightarrow ef_{/x}(x,y) + ef_{/y}(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow ef_{/y}(x,y) = \frac{-x}{y} \text{ au } V(0,10)$$

3/ $\frac{\Delta x}{x} = 10\,\%$

$$\frac{\Delta f}{f} = ef_{/x}(10,10) \cdot \frac{\Delta x}{x} + ef_{/y}(10,10) \cdot \frac{\Delta y}{y}$$

$$= \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}$$

$$= 10\% - \frac{\Delta y}{y}$$

4/ $\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x}{x} - 10\,\%$ (de même que 3)

Exercice 8:

2/ $f(x,y) = -x^2 + 4y^2$

$g(x,y) = x + 2y^2 - 2 = 0$

$L(x,y) = -x^2 + 4y^2 - \lambda\,(x + 2y^2 - 2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y) = -2x - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 8y - 4\lambda y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

2

$x = \frac{\lambda}{2}$ $\quad y = 0$ ou bien $\lambda = 2$

$y(8 - 4\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } y = 0 \\ x = 2 \\ \lambda = -4 \end{cases}$ $\quad (2,0)$ avec $\lambda = -4$

$(x + 2y^2 - 2) = 0$

Si $\lambda = 2$

$x = -1$

$2y^2 = 3 \Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\left(-1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ et $\left(-1, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$
avec $\lambda = 2$

$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 x}(x,y) = -2$

$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 y}(x,y) = 8 - 4\lambda$

$\frac{\partial^2 L}{\partial xy}(x,y) = 0$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 1$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y$

$$H(2,0) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 24 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det H(2,0) = -2 \begin{vmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 24 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -24 < 0$$

$\det H(2,0) < 0$ donc le point $(2,0)$ est un minimum lié

$$H\left(-1,\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 & 4\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$\det H\left(-1,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 24x - 2 = 48 > 0$

donc le point $\left(-1,\sqrt{\frac{3}{2}}\right.$ est un maximum lié

$$H\left(-1,-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 & -4\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$\det H\left(-1,\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -2x - 2y = 48 > 0$

donc le point $\left(-1,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ est un maximum lié

3/ $f(x,y) = \ln(xy)$; $g(x,y) = 2x + 3y - 5 =$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$

$D_f = (]0,+\infty[\times]0,+\infty[) \cup (]-\infty,0[\times]-\infty,0[)$

$$y = \frac{-2x+5}{3}$$

$$g(x) = \ln\left(\frac{x(-2x+5)}{3}\right)$$

	0		$5/2$	
$-$	0	$+$	0	$-$

$D_g : \left]0, \frac{5}{2}\right[$

$$g'(x) = \frac{\frac{-4x+5}{3}}{\frac{-2x^2+5x}{3}} = \frac{-4x+5}{-2x^2+5x}$$

0		$5/4$		$5/2$
	$+$	0	$-$	
	$\nearrow$		$\searrow$	

$\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right)$ max lié

(4)

4/ $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$L(x,y) = 6 - 4x - 3y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = -4 - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = -3 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{\lambda}, \quad \lambda \neq 0 \\ y = -\frac{3}{2\lambda} \\ \frac{4}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{\lambda} \\ y = -\frac{3}{2\lambda} \\ \frac{25}{4\lambda^2} = 1 \quad \lambda^2 = \frac{25}{4}, \lambda = \pm\frac{5}{2} \end{cases}$$

Si $\lambda = \frac{5}{2}$ $\quad x = \frac{-4}{5}, y = -\frac{3}{5}$

Si $\lambda = -\frac{5}{2}$ $\quad x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) = -2\lambda$

$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) = -2\lambda$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y$

5

$$H\left(-\tfrac{4}{5}, -\tfrac{3}{5}\right) \begin{pmatrix} -5 & 0 & -8/5 \\ 0 & -5 & -6/5 \\ -8/5 & -6/5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det H = -5\left(-\frac{36}{25}\right) - 8/5(-8)$$
$$= -20 < 0$$

$\left(-4/5, -3/5\right)$ min lié

$$Hf\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \begin{pmatrix} 5 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 5 & \frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$\det = -20 < 0$

$\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ est un minimum lié