I.H.E.C – Carthage	Série n°3	1er L.F.G.

Exercice n°1 :

1) Soit X un vecteur propre d'une matrice A carrée d'ordre n, λ la valeur propre associée. Soit P une matrice carrée inversible d'ordre n.

Montrer que $P^{-1}.X$ est un vecteur propre de $P^{-1}.A.P$ associé à une valeur propre que l'on précisera.

2) A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(IR)$. On suppose que X est un vecteur propre de A associé à la valeur λ et que X est aussi un vecteur propre de A + B associé à une valeur propre que l'on déterminera.
3) Soit X un vecteur propre d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(IR)$ associé à la valeur propre λ.
   Montrer que X est un vecteur propre de A^n ($n \in IN^*$) quelle est la valeur propre associée ?
4) Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(IR)$ irréversible alors $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1}.
5) Soit $A \in \mathcal{M}_2(IR)$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   a. Montrer que le polynôme caractéristique de A est : $P_A(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A).\lambda + Det\,A$.
   b. Vérifier le polynôme caractéristique de B est :
   $P_B(\lambda) = -\lambda^3 + Tr(B)\lambda^2 - Tr(Com.B).\lambda^2 + Det\,B$
6) Soit A et B deux matrice de $\mathcal{M}_n(IR)$ et P est matrice inversible telle que $A = P.B.P^{-1}$ (on dit que A et B sont semblables).
   a. Montrer que $P_B(\lambda) = P_A(\lambda)$.
   b. Montrer que Dét B = Dét A.

Exercice n°2 :

On considère la matrice $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $a \in IR$.

1) Déterminer les valeurs propres de A.
2) Déterminer les réels a pour lesquels A(a) est inversible.
3) Déterminer les réels a pour lesquels A(a) est diagonalisable lorsque A est diagonalisable déterminer les sous-espaces propres associés.
4) a. A(0) est-elle diagonalisable ?
   b. Calculer $\left(A(0)\right)^n$ où ($n \in IN^*$).

Exercice n°3 : Soit $a \in IR$ et soit $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix}$

1) Sans calcul donner une valeur propre de M(a) est un vecteur propre associé à cette valeur propre.
2) Calculer le polynôme caractéristique de $M(a)$
3) Pour quelles valeurs de a ; $M(a)$ a-t-elle toutes ses valeurs propres réelles ?
4) a. Déterminer la valeur de a pour laquelle $M(a)$ admet une valeur propre double.
   b. Pour cette valeur de a ; la matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

Exercice n°4 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

1) Calculer les valeurs propres de A.
2) Montrer que A diagonalisable.
3) Soient les valeurs : $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
   a. Exprimer $A.U$; $A.V$ et $A.W$ en fonction U, V et W. Que peut on déduire ?
   b. Soit $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$
      i. Montrer que : ${}^tP = P^{-1}$
      ii. Trouver une matrice D diagonale telle que $A = P.D.\,{}^tP$
      iii. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice n°5 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1) Calculer les valeurs propres de A (on notera $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ces valeurs propres).
2) On pose $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   a. Calculer D^n ($n \in IN^*$)
   b. Vérifier que $A.P = P.D$ puis calculer P^{-1} . En déduire A^n ($n \in IN^*$)
3) Soit $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ la suite de IR^3 définie par $\begin{cases} X_{n+1} = A.X_n \\ X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$
   a. Exprimer X_n en fonction de X_0.
   b. Déduire les natures respectives, des suites réelles. (x_n); (y_n) et (z_n).

Exercice n°6 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$.
2) Déterminer les réels a, b et c tels que :
   $\forall x \in IR$ $X^n = (X^3 - 3X^2 + 2X).Q(X) + (aX^2 + bX + c)$. où $Q(X)$ est un polynôme que l'on ne déterminera pas.
3) Calculer A^n où $n \in IN^*$.
4) A est elle inversible ?

Exercice n°7 :

On donne $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice diagonale D telle que $T = D + N$ et vérifier que T est nilpotente.
2) Calculer T^n $(n \in IN^*)$.
3) Déterminer les valeurs propres de B et les sous-espaces propres associés. B est-elle diagonalisable ?
4) Déterminer une base $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de IR^3 telle que : $(B.u_1 = u_1)$; $(B.u_2 = u_1 + u_2)$ et $(B.u_3 = -2u_3)$
5) Déterminer la matrice P inversible telle que : $(B.P = P.T)$; puis Calculer B^n $(n \in IN^*)$.

Exercice n°8 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1) a. Calculer A^2 et A^3.
   b. Quelles sont les valeurs propres de A ? A est elle diagonalisable ?
2) On se propose de monter qu'il n'existe pas de matrice $\in M_3(IR)$ *telle que* $X^2 = A$.
   a. Montrer que si une telle matrice existe alors $(X.A = A.X)$
   b. En déduire que X est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in IR^3$
   c. Montrer que $(a = 0)$
   d. Conclure.
3) a. Montrer sans calculer que la matrice B est diagonalisable.
   b. Déterminer les valeurs propres de et les sous-espaces propres de la matrice B. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
   c. Calculer $D = P^{-1}.B.P$.
4) a. Calculer B^n $(n \in IN^*)$. Déduire B^3.
   b. Déterminer 2 matrices C telles que $C^2 = B$.
5) a. Soit $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer E^2; E^3 *et* E^n $(n \in IN^*)$
   b. En remarquant que $B = I + E$ où I est la matrice identique retrouver l'expression de B^3.
6) Soit $M = xB + yB^2 + zB^3 + tI$ où x, y, z *et* t 4 réels . Montrer que M est diagonalisable et déduire ses valeurs propres.

Exercice n°9 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer qu'il existe deux suites (a_n) *et* (b_n) telles que :
   $\forall\, n \in IN \quad A^n = a_n I + b_n J$ où I est la matrice identique.
2) Montrer que la suite (a_n) vérifié une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 que l'on déterminera (c'est-à-dire $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$)
3) On pose $a_n = \lambda(-1)^n + \mu(2^n)$ où $(\lambda, \mu) \in IR^2$. Montrer que (a_n) est une solution : puis déduire a_n
4) En déduire, pour tout $n \in IN$; une expression de A^n en fonction de n.

FIN