Série n°1:
Eléments de mathématiques financières

Exercice 1 (examen janvier 2007)

Un emprunt obligataire composé de 10 000 obligations de valeur nominal 1 000 D a été émis au taux nominal de 5% l'an. La valeur d'émission est de 990 D ; le remboursement se fait au pair (valeur de remboursement = valeur nominal) en 4 annuités sensiblement constantes.

Travail à faire :

1- Présenter la première ligne du tableau d'amortissement de cet emprunt en justifiant tous les calculs (arrondir les chiffres à l'unité la plus proche).
2- Combien d'obligations sont amorties lors de chacune des trois échéances suivantes ?
3- Un souscripteur ayant acheté 10 titres lors de l'émission s'est vu rembourser 2 titres au bout d'un an, 3 titres au bout de deux ans et les 5 derniers au bout de quatre ans. Les capitaux perçus (remboursement et coupons) lors des trois premières échéances ont été placés sur un compte rémunéré à intérêt composé au taux de 4% par an.
Quel est sur cette période de 4 ans, le taux de rendement annuel réel des placements effectués ? (C'est le taux qui égalise la somme prêtée à la valeur actuelle des flux perçus).

Exercice 2 : (examen mai 2007)

Q1 : n annuités de 2 600 D chacune, capitalisées au taux annuel de 4,5%, ont une valeur acquise de 28 085,50 D. La valeur de n est :

☐ : 8
☐ : 9
☐ : 10
☐ : 11

Q2 : Un épargnant a placé pendant 10 ans un capital C. Pendant les n premières années, ce capital a été placé au taux annuel de 8 %, puis au terme de ces années, le capital initial augmenté des intérêts a été placé au taux annuel de 7 % pendant (10-n) années. L'épargnant constate que le taux annuel moyen de son placement est 7,40 %. La valeur de n est :

☐ : 4
☐ : 5
☐ : 6
☐ : 7

Exercice 3: (examen juin 2007) <u>Répondre aux 3 questions suivantes (A,B et C) qui sont indépendantes, en justifiant tous les calculs</u>

A/ On considère l'emprunt indivis dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Montant de l'emprunt : 2 000 000 D
- Taux d'intérêt annuel : 9 %
- Durée, n=30 ans
- L'emprunt est amorti par annuités constantes annuelles.

Travail à faire : Déterminer directement les chiffres de la 24ème ligne du tableau d'amortissement de l'emprunt.

B/ Monsieur Toumi souhaite se constituer un complément de ressources au début de sa retraite. Il prend contact avec son banquier qui lui recommande un produit financier. Il est convenu que Mr Toumi versera au début de chaque année une annuité de 20 000 D. Le taux d'intérêt annuel servi est de 6 %.

Travail à faire : Le premier versement ayant lieu un an après la date de signature du contrat, de quel montant disposera monsieur Toumi au début de sa retraite (soit huit ans et trois mois après le premier versement)?

C/ Un trésorier dispose sur une période d'un an de 20 millions de dinars. Il met en compétition ses deux banques habituelles :

- La première propose de rémunérer l'excédent de trésorerie à un taux de 1 % trimestriel, les intérêts étant composés trimestriellement sur la durée du placement ;
- La seconde banque propose de rémunérer le placement à un taux semestriel de 2 % composé semestriellement sur l'année.

Travail à faire : Quel placement sera retenu par le trésorier?

SERIE MATHS FIN ①

EXERCICE 1 (Janv 2007)

Emprunt obligataire → 10.000 obligations

10.000.000 D VN = 1000 D

taux = 5%

valeur d'émission = 990 D.

Remboursement au pair → VR = VN en 4 annuités constantes

1°/ Tableau d'Amortissement

ANNUITÉ = Amortissement + Intérêt

capital de début de période	Intérêt (I)	Amort (A)	Annuité (a)
10.000.000	500.000	2320119	2820119

$$VA \text{ ou } V_0 = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \text{avec } i = 5\% \text{ et } n = 4 \text{ ans.}$$

$$10.000.000 = a \cdot 3,545950 \Rightarrow a = \frac{10.000.000}{3,545950} = 2820118,7$$

$$\approx \boxed{a = 2820119}$$

2°/ $A_1 = a - I_1 = 2320119$

nombre : $n_1 = \frac{A_1}{1000} = \frac{2320119}{1000} \rightarrow \boxed{n_1 = 2320 \text{ obligations}}$

Suite tableau d'Amortissement.

début de période	Intérêt	Amortissement	Annuité
10.000.000	500.000	2320119	2820119
7679881	383994	2436125	2820119
5243756	262188	2557931	2820119
2685825	134291	2685825	2820119
	$\Sigma =$	10.000.000	

2e période (2e échéance) → nombre d'obligations $= \frac{2436125}{1000} = 2436$

3e période → nombre d'obligations $= \frac{2.557931}{1000} = 2558$ oblig.

4e période → nombre d'obligations $= \frac{2685825}{1000} = 2686$ oblig.

3°/

Périodes	Flux de Coupons	Flux de capit	Flux Total	Durée de capitalisato.	Valeur Acquise en f=4
1	10 × 50 = 500	2 × 1000 = 2000	2500	3	2812,16
2	8 × 50 = 400	3 × 1000 = 3000	3400	2	3677,44
3	5 × 50 = 250	—	250	1	260.
4	5 × 50 = 250	5 × 1000 = 5000	5250	0	5250
				Total	11999,6.

Investissement Initial : Somme prêtée = 10 × 990 = 9900 D.

TR: 9900 —4→ 11999,6

$\Rightarrow$ TR / $9900(1+TR)^4 = 11999,6$

$\Rightarrow$ $\boxed{TR = 4,926\%}$

EXERCICE 2 (Mai 2007)

$Q_1 \rightarrow$ Réponse : $n = 9$

$Q_2 \rightarrow$ Réponse : $n = 4$.

EXERCICE 3 (Juin 2007)

1/

Dette Totale $(D_T) = a_{nn} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow a_n = \frac{D_T \times i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{2.000.000 \times 0{,}09}{1-(1{,}09)^{-30}}$.

$\Rightarrow \boxed{a_{nn} = 194672{,}703^D}$ (a = annuité)

- $D_T = Am_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow Am_1 = \frac{D_T \times i}{(1+i)^n - 1} = \frac{2.000.000 \times 0{,}09}{(1{,}09)^{30} - 1}$.

$\Rightarrow \boxed{Am_1 = 14672{,}7028^D}$

- $Am_{24} = Am_1 (1+i)^{23} = \underline{106492{,}635^D}$
- $I_{24} = a - Am_{24} = \underline{88180{,}0678^D}$
- Capital restant dû$_{23} = \frac{I_{24}}{i} = \frac{88180{,}0678}{0{,}09} = \underline{979778{,}531^D}$

/ $V_9 = a \cdot \frac{(1+i)^9 - 1}{i} = 20.000 \frac{(1{,}06)^9 - 1}{0{,}06} = 229826{,}32^D$

$V_{9 + \frac{1}{4}} = 229826{,}32 \left(1 + \frac{6}{100} \times \frac{3}{12}\right) = 233273{,}714^D$

Methode 1 :

Option 1 : Taux Annuel Equivalent $= (1+t_{trimestriel})^4 - 1 = 4,06\%$

Option 2 : Taux Annuel Equivalent $= (1+t_{semestriel})^2 - 1 = 4,04\%$

$\Rightarrow$ Option 1 meilleure.

Méthode 2 :

Option 1 : $V_{1an} = 20.000.000 (1+t_{trimestriel})^4 = 20812080,2D$

Option 2 : $V_{1an} = 20.000.000 (1+t_{semestriel})^2 = 20808000D$

$\Rightarrow$ Option 1 meilleure.