Faculté des Sciences Économiques et de Gestion de Tunis
Année Universitaire 2014/2015
1ère Année Licence Fondamentale d'Économie et de Gestion (LFE & LFG)
Session de Rattrapage, Épreuve de Mathématiques II, Juin 2015

Durée : 2 h   Nbre de pages : 01

Exercice 1

1. Rappeler la définition d'une loi de composition interne sur un ensemble E.

2.a Rappeler la définition d'un anneau $(A,+,*)$. Si l'opération $*$ vérifie pour tous $x,\ y \in G$, $x * y = y * x$, alors que peut-on dire de l'anneau $(A,+,*)$.

2.b Donner un exemple d'anneau non commutatif.

3.a Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 3f + 2Id = \hat{0}$, où $\hat{0}$ est l'application nulle. Montrer que f est bijective et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de f.

3.b Montrer que $E = ker(f - Id) \oplus ker(f - 2Id)$.

4.a On considère le sous-ensemble $F = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; tel\ que\ y = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4.b Le complémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

5. Soit $F = Vect(\{(1,1,0),(0,1,-2)\})$ et $G = Vect(\{(2,1,2);(1,0,2)\})$ deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Montrer que $F = G$.

6. Soient $u = (1,1,1,1)$ et $v = (1,2,3,4)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Déterminer a et b pour que le vecteur $w = (1,-1,a,b)$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré par u et v.

7. Soit F l'ensemble des vecteurs $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + \ \ z = 0 \end{cases}$

7.a Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

7.b Donner une base de F tout en précisant sa dimension.

8. Soit la famille $\mathcal{A} = \{(1,1,1);(2,0,-1);(-1,1,2);(3,1,0)\}$ formée par quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La famille $\mathcal{A}$ est-elle libre ?

9. Soient $(G,*)$ et (H,T) deux groupes, et soit l'application $f : G \longrightarrow H$. Sous quelle condition f est dite homomorphisme (ou morphisme) de groupe.

Exercice 2

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme $f(.)$ de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f(e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $f(e_2) = e_1 - e_2 - e_3$ et $f(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Justifier pourquoi $f(.)$ est linéaire.

2. Déterminer $Ker(f)$ et en donner une base.

3. Déterminer $Im(f)$ et en donner une base.

4.a Trouver un vecteur non nul X_1 de $\mathbb{R}^3$ tel que la famille $(X_1, f(X_1))$ soit libre.

4.b Trouver un vecteur X_2 de $ker(f)$ tel que la famille $\mathcal{F} = (X_1, f(X_1), X_2)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

5. Écrire la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{F}$.