Faculté des Sciences Économiques et de Gestion de Tunis
Année Universitaire 2014/2015
1ère Année Licence Fondamentale d'Économie et de Gestion (LFE & LFG)
Session Principale, Épreuve de Mathématiques II, Mai 2015

Durée : 2 h   Nbre de pages : 01

Exercice 1

1. Rappeler la définition d'un groupe $(G,*)$. Si de plus l'opération $*$ vérifie : $x*y=y*x$, pour tous $x,y\in G$, alors que peut-on dire du groupe $(G,*)$. √

2. Soit $(G,*)$ un groupe, et x, y et z sont trois éléments de G.

2.a Montrer que si : $x*y=x*z$, alors $y=z$. √

2.b Que vaut $(x^{-1})^{-1}$?

2.c Quel est l'inverse de x si $x^n=e$?

3. Soit $(G,*)$ un groupe et $H\subset G$. Sous quelles conditions $(H,*)$ est dit sous-groupe de $(G,*)$?

4. Soit E un K-espace vectoriel et F une partie de E.

4.a Sous quelles conditions F est un sous-espace vectoriel de E. √

4.b Que représente $Vect(F)$ tout en explicitant ses propriétés.

5. Rappeler l'énoncé du théorème de la base incomplète. √

Exercice 2

1. Soit $f(.) : E\to F$ une application linéaire et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E ; F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de F. Que pouvez-vous dire de $f(E_1+E_2)$, $f(E_1\cap E_2)$, $f^{-1}(F_1+F_2)$ et $f^{-1}(F_1\cap F_2)$ tout en justifiant la réponse ?

2. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x\in E$, la famille $\{x,f(x)\}$ est liée.

2.a Montrer que si $x\neq 0_E$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x)=\lambda_x x$.

2.b Montrer que si $E=Ker(f)\oplus Im(f)$, alors $Im(f)=Im(f^2)$.

2.c Montrer la réciproque, c'est-à-dire que si $Im(f)=Im(f^2)$, alors $E=Ker(f)\oplus Im(f)$.

3. Soit E, F et G trois K-espaces vectoriel et soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$. Montrer que $g\circ f=\hat{0}\Leftrightarrow Im(f)\subset Ker(g)$, où $\hat{0}$ est l'application nulle.

Exercice 3

Soit $f(.) : \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ définie par : $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_3,2x_1+x_2-3x_3,-x_2+2x_3)$

1. Montrer que $f(.)$ est une application linéaire.

2. Déterminer $Ker(f)$ et en donner la dimension.

3. Déterminer $Im(f)$ et en donner une base.

4. $f(.)$ est-elle injective, surjective, bijective ?

5. Déterminer la matrice de $f(.)$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.