Faculté des Sciences Économiques et de Gestion de Tunis
Année Universitaire 2012/2013

1ère Année Licence Fondamentale d'Économie
Épreuve de mathématiques I, Janvier 2013

Durée : 2 h   Nbre de pages : 01

Exercice 1

1. Prouver que toute suite numérique croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

2.a Rappeler la définition d'une valeur d'adhérence d'une suite numérique (u_n).

2.b Soit la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général $u_n = (-1)^n$. Donner ces valeurs d'adhérence.

2.c En déduire qu'elle n'a pas de limite.

3. Soit $f(.)$ la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

3.a Calculer $\lim_{x\to -1} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

3.b Donner le sens des variations de la fonction $f(.)$.

4. Soit la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4.a Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4.b En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

4.c Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$.

4.d En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - 1| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}|u_0 - 1|$. Donner $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2

1. Que peut-on dire du terme général u_n si la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

2. Rappeler la définition de la série harmonique.

3. Soit la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ avec α réel et $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
Montrer que la suite (S_n) est croissante pour toute valeur de α.

4. Dans cette question, on suppose que $\alpha \leq 1$.

4.a Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, on a : $x^{1-\alpha} \geq 1$.

4.b Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.

4.c Que peut-on donc conclure pour la série de Riemann lorsque $\alpha \leq 1$. $\Rightarrow$ série divergente

5. Dans cette question, on suppose que $\alpha > 1$.

5.a Montrer que la fonction $f(.)$ définie par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

5.b On donne la propriété : $\forall\, k \geq 2$, $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$. Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

5.c En déduire que la suite (S_n) est croissante et majorée.

5.d Que peut-on donc conclure pour la série de Riemann lorsque $\alpha > 1$.

$-\frac{U'}{U^2}$

CV

$\alpha > 1$