

Examen de Statistique Descriptive

Session principale – Juin 2011 –

Classes : Première année 1LAE

L'usage de la calculatrice est autorisé

Durée de l'épreuve : 2 Heures

Question de cours (4 points)

Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes :

- 1- L'indice élémentaire est réversible alors que l'indice de Fisher ne l'est pas.
- 2- Les deux droites de régression (de Y en X) ou (de X en Y) ont le même coefficient directeur.
- 3- Le moment non centré d'ordre 2 est égal à la variance d'une variable statistique
- 4- L'indépendance de deux variables en termes de fréquences relatives se traduit par :

$$f_{ij} = f_{i.} \times f_{.j} \text{ quelques soient } i \text{ et } j$$

EXERCICE 1 (6 points)

Un agriculteur utilise deux exploitations agricoles pour produire trois légumes différents. Le tableau suivant indique, pour ces deux exploitations, les coûts et les quantités produites de légumes par hectare.

Légumes	Quantités		Prix (coût)	
	Exploitation 1	Exploitation 2	Exploitation 1	Exploitation 2
A	250	150	2,4	3,04
B	250	200	3,35	4,5
C	350	300	4,2	4,5

- 1- Calculer les indices de prix de Laspeyres et de Paasche de l'exploitation 2 par rapport à l'exploitation 1 sur l'ensemble de ces trois légumes.
- 2- Calculer les indices de quantité de Laspeyres et de Paasche de l'exploitation 2 par rapport à l'exploitation 1 sur l'ensemble de ces trois légumes.
- 3- Calculer les indices élémentaires des prix de l'exploitation 2 par rapport à l'exploitation 1 pour chacune des trois légumes.
- 4- Calculer les coefficients budgétaires relatifs aux deux exploitations pour chacune des trois légumes.
- 5- Retrouver les indices de prix de Laspeyres et de Paasche de l'exploitation 2 par rapport à l'exploitation 1 en utilisant les indices élémentaires et les coefficients budgétaires.

EXERCICE 2 (5 points)

Une entreprise fabrique deux produits A et B. Le tableau suivant indique l'évolution du volume des ventes des deux produits au cours de 11 mois d'une année :

Mois	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X_i : Ventes de A	160	140	100	65	130	150	120	160	180	60	50
Y_i : Ventes de B	18	15	10	8	14	16	12	17	20	7	4

1. Calculer $V(X)$, $V(Y)$ et $COV(X,Y)$ à 10^{-2} près (soit 2 chiffres après la virgule).
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire $r_{X,Y}$. Quelle est sa signification ?
3. Déterminer la droite de régression de Y en X. Que pensez-vous de la qualité de l'ajustement linéaire (justifier votre réponse) ?
4. Le 12^{ème} mois, on prévoit de vendre 200 unités de A. Si l'évolution se poursuit de la même façon, quel devrait être théoriquement le volume des ventes du produit B au cours de ce mois ?

EXERCICE 3 (5 points)

Dans la République du *Challand*, une enquête en vue de la réduction du montant des allocations familiales, a été réalisée auprès d'une population de femmes de 40 ans. Cette enquête a donné les résultats suivants :

Nombre d'enfants (x_i)	Nombre de femmes (n_i)
----------------------------	----------------------------

CORRECTION EXERCICE 2

Mois	Xi	Yi	Xi ²	Yi ²	XiYi
1	160	18	25600	324	2880
2	140	15	19600	225	2100
3	100	10	10000	100	1000
4	65	8	4225	64	520
5	130	14	16900	196	1820
6	150	16	22500	256	2400
7	120	12	14400	144	1440
8	160	17	25600	289	2720
9	180	20	32400	400	3600
10	60	7	3600	49	420
11	50	4	2500	16	200
Total	1315	141	177325	2063	19100

1/

$$\bar{X} = 1315 / 11 = 119,55$$

$$\bar{Y} = 141 / 11 = 12,82$$

N = 11

Ecart types (ST)

$$V(X) = 1/N \cdot \sum X_i^2 - (\bar{X})^2 = 1828,25$$

$$47,76$$

$$V(Y) = 1/N \cdot \sum Y_i^2 - (\bar{Y})^2 = 23,19$$

$$4,82$$

$$\text{COV}(X,Y) = 1/N \cdot \sum X_i Y_i - (\bar{X})(\bar{Y}) = 203,73$$

2/ $r_{X,Y} = \text{Cov}(X,Y) / \text{ET}(X) \cdot \text{ET}(Y) = 0,989$

Interpret.: Très forte (ou excellente) corrélation linéaire positive entre les 2 variables

3/ $a_{\text{chapeau}} = \text{COV}(X,Y) / V(X) = 203,73 / 1828,25 = 0,11$

$$b_{\text{chapeau}} = \bar{Y} - a_{\text{chapeau}} \cdot \bar{X} = -0,33$$

l'équation de la droite de régression est donc: $Y = 0,11X - 0,33$

Qualité de l'ajustement est appréciée grâce au coefficient de détermination R^2 qui n'est autre que le carré du coefficient de corrélation

Donc: $R^2 = (r_{X,Y})^2 = 0,979$

Indiquant une très bonne qualité, voir excellente, de l'ajustement linéaire

4/ $Y_{\text{prévision}} = (0,11 \cdot 200) - 0,33 = 21,67$

$$(\hat{X} \text{ à } 200) - \hat{b}$$

$$X \rightarrow Y \rightarrow \text{Prévision}$$

Calcul final

$$V = 6$$

$$S = 5$$

$$V = 6$$

COMPOSITION EXERCICE 3

X	7	7 à 9	9 à 11	11 à 14	DM
1	7	3	10	20	
2	4	0	6	10	
3	5	14	11	30	
4	6	18	16	40	
DM	22	35	43	100	

DM (X)	xi	ni
1	20	
2	10	
3	30	
4	40	
Total	100	

2/
 Mode (X) = 4
 Classe modale (Y) = [11 - 14[
 Mode de Y = $(11+14)/2 = 12,5$

3/ Distribution de Y/X = 2

yi	eff. Condit.	Fréq. Condit.	Fréq. Cumul.	Centres	fi * ci	fi * ci2
[7 - 9[	4	0,4	0,4	8	3,2	25,6
[9 - 11[	0	0	0,4	10	0	0
[11 - 14[	6	0,6	1	12,5	7,5	93,75
Total	10	1			10,7	119,35

DM (Y)	yi	ni
[7 - 9[	22	
[9 - 11[	35	
[11 - 14[	43	
Total	100	

Interpolation linéaire sachant que $F(Me) = 0,5$

11 0,4
 Me 0,5
 14 1

D'où $Me = 11,5$

5/
 variance conditionnelle de Y/X = 2
 $\sum fi * ci^2 - moy^2 = 108,65$

4/ Distribution de Y/X = X

yi	eff. Condit.	Centres	ni * ci
[7 - 9[	6	8	48
[9 - 11[	18	10	180
[11 - 14[	16	12,5	200
Total	40		428

Donc la moyenne conditionnelle de Y/X = 4 est de $428/40$ soit

10,7

CORRECTION EXERCICE 1

Augmentation de la part de B au détriment de A

	Q_0	Q_1	P_0	P_1	$P_0 \cdot Q_0$	$P_1 \cdot Q_1$	$P_1 \cdot Q_0$	$P_0 \cdot Q_1$	3/ IP	4/ Wo	Wt	1/IP	5/ $\sum W_0 \cdot IP$	1/P(p)
A	250	150	2,4	3,04	600	456	760	350	126,7	0,206	0,169	0,00789	26,139	0,00133
B	250	200	3,35	4,5	837,5	900	1125	670	134,3	0,288	0,333	0,00744	38,693	0,00248
C	350	300	4,2	4,5	1470	1350	1575	1260	107,1	0,506	0,499	0,00933	54,170	0,00466
Total					2907,5	2706	3460	2290		1,000	1,000		119	0,00846

$$\begin{aligned} 1/ \\ L(p) &= \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} = \frac{3460}{2907,5} = 119 \\ P(p) &= \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1} = \frac{2706}{2290} = 118 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2/ \\ L(q) &= \frac{\sum P_0 Q_1}{\sum P_0 Q_0} = \frac{2290}{2907,5} = 78,8 \\ P(q) &= \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_1 Q_0} = \frac{2706}{3460} = 78,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5/ \text{ Formules } \\ L(p) &= \sum W_0 \cdot IP \\ 1/P(p) &= \sum W_t \cdot 1/IP \end{aligned}$$

Les coûts de l'exploitation 2 sont de 19% plus élevés que ceux de l'exploitation 1

$$\begin{aligned} 5/ \\ P(p) &= 1/0,00846 \\ &= 118 \end{aligned}$$

Les quantités de l'exploitation 2 sont de 21% moins élevées que celles de l'exploitation 1

CORRECTION QUESTION COURS

- 1/ FAUX car l'indice de Fischer est aussi réversible
- 2/ FAUX Elles ont des coefficients directeurs différents
- 3/ FAUX Le moment centré d'ordre 2 est égal à la variance
- 4/ VRAI C'est une formule du cours (chapitre distributions à 2 variables)

$$I = \frac{x_t}{x_0} \approx 100$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{3104}{2216} \times 100 \\ P_0 &= 1399 \end{aligned}$$

0	10
1	20
2	20
3	30
4	20

1. Caractériser la distribution (population, unité, caractère et nature)
2. Tracer la représentation graphique la plus pertinente pour cette distribution.
3. Déterminer les fréquences cumulées croissantes et tracer la courbe cumulative.
4. Donner la proportion des femmes ayant moins de 4 enfants.
5. Etablir la distribution des enfants selon le nombre de leurs frères et sœurs.

BON TRAVAIL