

Examen : Logique mathématique

(Documents Non autorisés)

Date : 28 Janvier 2015

Durée : 2h

Responsable du cours : I. Mouakher-Abdelmoula

Section : 2^{ème} L.FIG

Partie I : Logique propositionnelle

Exercice 1

Traduisez les phrases suivantes dans le langage de la logique propositionnelle et déterminez pour chaque item si φ est une conséquence logique de φ_1 et φ_2 ou non en utilisant la méthode des tables de vérité.

1. φ_1 : Si Jean vient, Marie part ; φ_2 : Marie ne part pas ; φ : Jean ne vient pas
2. φ_1 : Si Jean vient ou si Frédéric vient, alors Marie est heureuse ; φ_2 : Ni Frédéric ni Jean ne viennent ; φ : Marie n'est pas heureuse.

Exercice 2

Démontrer en utilisant la règle de résolution que les formules suivantes sont valides :

- $\varphi_1 : ((C \Rightarrow A) \wedge (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \wedge B))$
- $\varphi_2 : ((D \Rightarrow A \vee B) \wedge (D \wedge A \Rightarrow C) \wedge (D \wedge B \Rightarrow C)) \Rightarrow (D \Rightarrow C)$

Partie II : Logique des prédicats

Exercice 3

Soit I l'interprétation suivante : $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, où

- $Q(x)$ est vrai pour $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $P(x)$ est vrai pour $\{2, 3, 5, 7\}$
- $N(x)$ est vrai pour $\{0, 1, 2, 3\}$

1. Les énoncés suivants sont-ils vrais dans I ?

- $\varphi_1 : \forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$
- $\varphi_2 : \exists x (N(x) \wedge P(x))$
- $\varphi_3 : \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$
- $\varphi_4 : \exists x (P(x) \wedge (\neg Q(x) \wedge \neg N(x)))$

Exercice 4

Traduisez les énoncés suivants dans le langage de la logique des prédicats, en utilisant comme prédicats : $Z(x)$ pour "x est un zèbre", $C(x)$ pour "x est un cheval", $E(x)$ pour "x est un éleveur" et $P(x,y)$ pour "x possède y" et comme constante 'a' pour "Titus".

- Tous les zèbres aiment les chevaux.
- Titus est un zèbre mais Titus n'est pas un cheval.
- Certains chevaux n'aiment pas certains zèbres.
- Tous les éleveurs qui possèdent des zèbres possèdent aussi des chevaux.
- Certains éleveurs ne possèdent que des zèbres.
- Certains éleveurs ne possèdent pas de chevaux.

Exercice 5

Mettre sous forme normale de Skolem les formules suivantes :

- $\varphi_1 : \forall x (\exists z M(z) \wedge S(x, z) \Rightarrow \exists y I(y) \wedge E(x, y))$
- $\varphi_2 : \neg(\exists x I(x)) \Rightarrow \neg(\exists x \exists y (M(y) \wedge S(x, y)))$

$$\neg \neg (\exists x I(x)) \vee \neg \exists x \exists y (M(y) \wedge S(x, y))$$