Session Principale Mai2019

EPREUVE DE MATHS

EXERCICEN°1(3pts)

Soit A matrice d'ordre 3

Répondre par vrai ou faux *Sans* justification les affirmations suivantes :

1) Toute matrice A diagonalisable est inversible

2) Si det $(A+2I_3)=0$ Alors -2 *est une valeur propre de A*

3) det(5A) = 5 ×det(A)

EXERCICEN°2(12pts)

PARTIEA On considère les matrices suivantes :

$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $S=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; $T=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

; $Q=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ $K=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ *et* $V=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

1)a)Calculer transposée de A noté t_A et Trace de A noté tr(A)

b) Justifier que A est diagonalisable .

c) Calculer det $(A+I_3)$, que peut – on déduire ?

d) Calculer A .V , que peut – on déduire ?

2)a) Déduire les valeurs propres de A .

b) Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}

3) a)Calculer la matrice diagonale $D=P^{-1}A\,P$

b) On donne B= A^3-2A+I_3 Montrer que B est diagonalisable et déduire les valeurs propres de B

PARTIE B

1) a)Calculer T.Q

b) Déduire que T est inversible et calculer T^{-1}

c)On admet que $T^{-1}.S.T=K$ Calculer $K^n puis$ S^n en fonction de n pour tout $n\in N$

2) a) Déterminer une matrice J telle-que : $A=I_3+2J$

b) Vérifier que $J^2=2I_3+J$

3) a)Soient (a_n) *et* (b_n)*deux suites*; avec $a_0=1$ *et* $b_0=0$ et que $\begin{cases}a_{n+1}=a_n+4b_n\\ b_{n+1}=2a_n+3b_n\end{cases}$

Montrer par récurence que pour tout $n\in N$ On a : $A^n=a_nI_3+b_n\,J$

b)On pose $U_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$ vérifier que $U_{n+1}=S\,U_n$ et déduire que $U_n=S^nU_0$

c) Déterminer a_n et b_n en fonction de n

d) Déduire l'expression de A^n en fonction de n

EXERCICEN°3(5 pts)

Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & a & 3\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$ **avec** $a\in R$

1) Calculer det A

2) On donne le système (S) :

$$(S)\begin{cases}x+2y+3z=1\\ x+ay+3z=a-1\\ 2x+2y+4z=2\end{cases}$$

i) Pour quelles valeurs de a le système (S) est de Gramer ?

ii) Lorsqu'il est de Gramer , résoudre (S)avec la méthode deGramer

EPREUVE DE MATHS II Mai 2019

EXERCICE N°1

1/ Faux (car si $\lambda=0$ valeur propre)

2/ Vrai $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ or $P_A(-2)=\det(A+2I)=0$
signifie que $\lambda=-2$ valeur propre de A

3/ Faux $A\in \mathcal{M}(3,3)$ $\det(5A)=5^3\det A$

EXERCICE N°2 Partie A

1/a) ${}^tA=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}=A$ et $Tr(A)=1+1+1=3$

b) ${}^tA=A \Leftrightarrow A$ symétrique Alors A est diagonalisable

c) $\det(A+I_3)=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_1&C_2&C_3\end{matrix}\\ \begin{vmatrix}2&-2&2\\-2&2&-2\\2&-2&2\end{vmatrix}\end{array}=0$ car $C_1=C_3$

$\det(A+I_3)=P_A(-1)=0$ D'où $\lambda=-1$ valeur propre de A

d) $AV=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-5\\+5\end{bmatrix}=5V$

D'où V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 5

2/a) Comme $Tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=3$
$=-1+5+\lambda_3=3 \Rightarrow \lambda_3=-1$

Conclusion les valeurs propres de A sont
$\lambda_1=-1$ vp d'ordre 2
$\lambda_2=5$ vp d'ordre 1 (simple)

b) $\det P=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_1&C_2&C_3\end{matrix}\\ \begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_1&C_2&C_3-C_1\end{matrix}\\ \begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&-2\\0&1&1\end{vmatrix}\end{array}=\begin{vmatrix}1&-2\\1&1\end{vmatrix}=3\neq 0$

D'où P inversible et $P^{-1}=\dfrac{1}{\det P}\,{}^t\mathrm{com}P$

$\mathrm{Com}P=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}$ $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&1&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$

3/a) $D = P^{-1}AP$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

b) $D^n = P^{-1}A^nP$

D'ou $P^{-1}BP = P^{-1}A^3P - 2P^{-1}AP + P^{-1}I_3P$

$$= D^3 - 2D + I_3$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 5^3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 116 \end{pmatrix}$$

Comme B est semblable à une matrice diagonale donc B est diagonalisable et les valeurs propres de B sont : $\lambda_1 = 2$ vp d'ordre 2 (double)

$\lambda_2 = 116$ vp d'ordre 1 (simple)

Partie B

1/a) $TQ = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -3I_2$

b) $T \times \frac{-1}{3}Q = I_2$ D'ou par définition T est inversible et $T^{-1} = \frac{-1}{3}Q$

c) $K^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$ $\quad T^{-1}ST = K$

$$TT^{-1}STT^{-1} = TKT^{-1}$$

$$S = TKT^{-1}$$

$S^n = TK^nT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\left(\frac{-1}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$S^n = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1} \\ -5^n & -2\times 5^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 2\times(-1)^{n+1} - 5^n & 2\times(-1)^n - 2\times 5^n \\ (-1)^n - 5^n & (-1)^{n+1} - 2\times 5^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\times(-1)^n + 5^n}{3} & \frac{2\times(-1)^{n+1} + 2\times 5^n}{3} \\ \frac{(-1)^{n+1} + 5^n}{3} & \frac{(-1)^n + 2\times 5^n}{3} \end{pmatrix}$$

2°/a) $A = I_3 + 2J$

$2J = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ D'où $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Verifier $J^2 = JJ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$2I_3 + J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

D'où $J^2 = 2I_3 + J$

3°/ Montrons par récurrence que $A^n = a_n I_3 + b_n J$

Initialisation : pour $n=0$

$\left.\begin{array}{l} A^0 = I_3 \\ a_0 I_3 + b_0 J = 1 I_3 + 0 J = I_3 \end{array}\right\} A^0 = a_0 I_3 + b_0 J$

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $A^n = a_n I_3 + b_n J$

Montrons que $A^{n+1} = a_{n+1} I_3 + b_{n+1} J$

Démonstration

$$A^{n+1} = A^n \times A = (a_n I_3 + b_n J)(I_3 + 2J)$$
$$= a_n I_3 + 2a_n J + b_n J + 2b_n J^2$$
$$= a_n I_3 + 2a_n J + b_n J + 2b_n (2I_3 + J)$$
$$= (a_n + 4b_n) I_3 + (2a_n + 3b_n) J$$
$$= a_{n+1} I_3 + b_{n+1} J \quad \text{(C.Q.D)}$$

b) on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases}$

$$U_{n+1} = S \cdot U_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

on peut déduire (U_n) est une suite géométrique de raison S d'où $U_n = S^n U_0$

c) $$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\times(-1)^n+5^n}{3} & \frac{2\times(-1)^{n+1}+2\times5^n}{3} \\ \frac{(-1)^{n+1}+5^n}{3} & \frac{(-1)^n+2\times5^n}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} U_0$$

D'où $a_n = \frac{2\times(-1)^n+5^n}{3}$

$b_n = \frac{(-1)^{n+1}+5^n}{3}$

d) $$A^n = a_n I_3 + b_n J = \begin{pmatrix} a_n & -b_n & b_n \\ -b_n & a_n & -b_n \\ b_n & -b_n & a_n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2\times(-1)^n+5^n}{3} & \frac{(-1)^n-5^n}{3} & \frac{(-1)^{n+1}+5^n}{3} \\ \frac{(-1)^n-5^n}{3} & \frac{2\times(-1)^n+5^n}{3} & \frac{(-1)^n-5^n}{3} \\ \frac{(-1)^{n+1}+5^n}{3} & \frac{(-1)^n-5^n}{3} & \frac{2\times(-1)^n+5^n}{3} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-2L_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} a-2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2(a-2)$$

i) Le système (S) est de Cramer si et seulement si $a \neq 2$

$\Delta = \det A \neq 0$

ii) $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$

$$\Delta x = \begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \quad C_3 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-1 & a & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} C_1 \quad C_2-2C_1 \quad C_3-3C_1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 2-a & 6-3a \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2-a & 6-3a \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2(2-a)+2(6-3a)$$

$$= -4+2a+12-6a$$

$$= -4a+8$$

$$= -4(a-2)$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{2\times\cancel{-2(a-2)}}{\cancel{-2(a-2)}} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a-1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2-C_1 & C_3-3C_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = -2(a-2)$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-2(a-2)}{-2(a-2)} = 1$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a-1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2-2C_1 & C_3-C_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a-2 & a-2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} a-2 & a-2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = 2(a-2)$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{2(a-2)}{-2(a-2)} = -1$$

Conclusion pour $a \neq 2$ $S_{\mathbb{R}^3} = \{(2,1,-1)\}$