

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = e^{x+y} - 3(x+y) + (x-y)^2$$

- 1°) Etudier l'existence et la nature d'extremum de f .
- 2°) Etudier l'existence et la nature d'extremum de f sous contrainte : $x+y=2$.

Exercice 2

1°) Déterminer a, b, c tq: $\frac{2t^2}{t^2-1} = a + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}$

2°) Calculer $\int \frac{2\sqrt{x}}{x-1} dx$ en posant $t = \sqrt{x}$

3°) Par intégration par parties Calculer $I(x) = \int \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x}} dx$

Exercice 3

Soit $f(x, y) = e^{x-y} + x^2 + y^2 - xy + y - x$

- 1°) Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$
- 2°) a) Déterminer les pts critiques de f . (on admettra que l'équation $e^{2x} + 3x - 1 = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une seule solution $x=0$)
b) Déterminer la nature des pts critiques de f .
- 3°) Démontrer : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; on a: $f(x, y) \geq 1$.
- 4°) Montrer que l'équation $f(x, y) = 2$ permet de définir une fonction implicite φ au $V(1, 1)$ puis Calculer $\varphi'(1)$
- 5°) a) Donner la formule de Taylor à l'ordre 2 au $V(1, 1)$ pour f
b) Démontrer l'équation du plan tangent à S_f au pt $(1, 1, 2)$
c) Démontrer la position de S_f au plan tangent au $V(1, 1)$
- 6°) On se place au pt $(1, 1)$, quel est l'effet d'une augmentation de 1% de x et d'une diminution de 2% de y sur la variation relative de f .

Bonne chance