Institut des Hautes Etudes commerciales Carthage A.U : 2013/2014

Epreuve : Mathématiques 1

Exercice 1 :

1) a) Etudier les variations de la fonction

$$\varphi(t)=e^{t}-\frac{1}{t}+(1-e)\ ;\quad t \in\,]0\ ,+\infty[$$

b) En déduire que $\varphi(t)=0$ admet 1 comme unique solution.

2) Soit $f(x, y)= e^{x+y} - \ln(x+y) + (1-e)(x+y)$

a) Déterminer et représenter le domaine de f.

b) En utilisant 1)b) donner l'ensemble des points critiques de f.

3) a) Etudier la convexité de f sur son domaine

b) En déduire la nature de chaque point critique de f.

c) Montrer alors que $f(x, y) \geq 1 \quad \forall (x, y) \in D_f$.

4) Optimiser f(x, y) sous la contrainte $g(x, y)= y-x = 0$.

Exercice 2 :

Soit $f(x, y) = 48\sqrt{2x+y+1} - 4x^2 - y^2 - 40$;

1) Déterminer et représenter le domaine de f.

2) a) Montrer que l'équation $f(x, y) = 0$ permet de définir une fonction implicite ϕ au voisinage du point $(1,-2)$.

b) Donner le développement limité à l'ordre 1 de $\phi(x)$ au voisinage de 1.

3) On se place au point $(\frac{1}{2},-1)$

a) Déterminer l'équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(\frac{1}{2},-1, 6)$

b) On suppose que x et y augmentent de 3%. Calculer une valeur approchée de la variation relative de f.

4) a) En étudiant les variations de $g(x) = 4x^3 + x^2 - 36$ montrer que 2 est la seule solution de $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Chercher les points critiques de f.

c) Etudier la convexité de f et déduire la nature du point critique.

d) En déduire la valeur maximale de f.

5) Optimiser $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 8 = 0$.

Exercice 3 :

Soit $I = \int_{-1}^{0} \frac{t\,dt}{(5-4t-t^2)^{3/2}}$

En posant : $t = \frac{x^2-5}{x^2+1}$, $x > 0$

Calculer I