IHEC-CARTHAGE

Année 2010/2011

Examen de rattrapage de Mathématique 2

Classe : 1ière LFG

Durée : 2 heures

Exercice 1 :

On considère le système (S) $\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ x + y - 2z + t = 0 \end{cases}$

1) a) Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

b) Déduire le rang de (S).

2) Résoudre le système (S).

Exercice 2 :

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad Q = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

A) 1) a) Calculer Det (P) et calculer PQ.

b) Déduire que P est inversible et donner P^{-1}.

2) a) Montrer que le polynôme caractéristique de A est $P_A(\lambda) = (4 - \lambda)(1 - \lambda)^2$

et déduire les valeurs propres de A

b) Déterminer une base de chacun des sous espaces propres associés à A.

c) A est-elle diagonalisable ?

Exercice : 2

Considérons les déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

1)a/ Exprimer la ligne L_4 comme combinaison linéaire des lignes L_1 . L_2 et L_3 (de Δ) et en déduire la valeur de Δ .

b/ Calculer δ et en déduire le rang de la matrice associée à Δ.

2) Soit le système :

$$(S)\begin{cases} x + y + 2z + 3t = 2 \\ 2x + y + z + 2t = 1 \\ -x + y - z = -3 \\ 2x + 3y + 2z + 5t = 0 \end{cases}$$

a/ la quatrième équation est-elle compatible avec les trois premières équations du système (S) ?

b/ En déduire que (S) est équivalent au système

$$(S')\begin{cases} x + y + 2z = 2-3t \\ 2x + y + z = 1-2t \\ -x + y - z = -3 \end{cases}$$

et exprimer x, y et z en fonction de t (sous forme de rapport de déterminants).

c/ L'ensemble des solutions S_R^4 de S possède-t-il une structure d'espace vectoriel ?.