IHEC-CARTHAGE

Examen principal de Mathématique 2 **Année 2011/2012**

Classe : 1ière LFG

Durée : 2 heures

Exercice 1 :

Soit

$$f(x) = \frac{6x+3}{(x-1)^2(x+2)}$$

1) Chercher a, b, c ($\epsilon\ \mathcal{R}$) tels que :

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x+2)}$$

2) En proposant un changement de variable, calculer

$$I = \int_{Ln2}^{Ln3} \frac{6e^{2t} + 3e^{t}}{(e^{t}-1)^2(e^{t}+1)} dt$$

Exercice 2 :

Résoudre, suivant le paramètre m , le système :

$$(S)\quad \begin{cases} (m-1)x + my + z = 1 \\ mx + 2y + 3z = 3 \\ (m+1)x + m\,y + (m-1)z = m-1 \end{cases}$$

Exercice 3 :

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -1 & -6 & -4 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1) a) Calculer le determinant de A

b) Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, calculer AU et en déduire que 1 est une valeur propre de A.

c) Montrer que 1 est une valeur propre de A de multiplicité 3.

2) a) Donner une base du sous espace propre associé à la valeur propre 1.

b) A est elle diagonalisable ?

3) Soit $B = (A - I)$ avec $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -1 & -6 & -4 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer B^2 et B^3

b) Montrer que A^n est combinaison linéaire de I, B et B^2.

c) Calculer A^n en fonction de l'entier n.

4) Chercher les suites (U_n) , (V_n) et (W_n) vérifiant le système récurrent

$$\begin{cases} U_{n+1} = 8U_n + V_n + 4W_n \\ V_{n+1} = -U_n - 6V_n - 4W_n \\ W_{n+1} = -6U_n + 6V_n + W_n \end{cases}$$

Sachant que $U_0 = 2, V_0 = -1$ et $W_0 = 1$

Bon travail

B) On pose $U = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $et\ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

1) **a)** Vérifier que $U\ et\ W$ sont deux vecteurs propres de A et que $AV = U + V$,

b) Comparer $AP\ et\ PT$.

2) **a)** Montrer par récurrence que

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

b) Montrer par récurrence que

$$A^n = PT^nP^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

c) Calculer A^n.

Exercice 3:

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1) a) Vérifier que $A^2 - 3A + 2I = 0$ où I est la matrice identité de type $(3,3)$.

b) En déduire que A est inversible et exprimer alors A^{-1} en fonction de A et I.

2) On admet que

$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + (2^n - 1)X + 2 - 2^n$

Déduire A^n en fonction de A et I et donner alors la matrice A^n en fonction de $n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bon travail