



IHEC
Carthage

Institut des Hautes Etudes Commerciales. Carthage

Filières : LFG 1

Matière : Maths II

2H

Examen principal, Mai 2015

Nb : le sujet contient 2 pages.

Exercice 1: (6 points)

1) Montrer que le déterminant $\Delta_m = \begin{vmatrix} 2m & 1 & m \\ m & m & 1 \\ 1 & 2m & 2m \end{vmatrix}$

est égal à $(3m + 1)(m - 1)(2m - 1)$.

2) Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réels m , le système linéaire :

$$(S) \begin{cases} 2mx + y + mz = 2 \\ mx + my + z = 1 \\ x + 2my + 2mz = 1 \end{cases}$$

Dans le cas où (S) de Cramer on se contente d'exprimer la solution sous forme d'un rapport de deux déterminants.

Exercice 2: (7 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

1) Calculer les valeurs propres de A : $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$.

2) Donner une base de chaque sous espace propre.

3) Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Chercher une matrice P_1 inversible telle que $A = P_1 D P_1^{-1}$

Matrice de Passage

$\frac{1}{\det P_1} \times \text{Comatrice } P_1$

4) Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Montrer que λ_1, λ_2 et λ_3 sont aussi les valeurs propres de B .
- Chercher P_2 telle que $B = P_2 D P_2^{-1}$.
- Déduire alors qu'il existe P inversible telle que $B = P A P^{-1}$ (donner P en fonction de P_1 et P_2).

Exercice 3 : (7 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

- Montrer que A admet 2 comme seule valeur propre.
 - A est-elle inversible ?
 - A est-elle diagonalisable ?
- On pose $B = A - 2I$, où I est la matrice identité.
 - Calculer B^2 .
 - Déduire alors $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
- Chercher U_n, V_n et W_n vérifiant le système récurant :

$$(S) \begin{cases} U_{n+1} = U_n - V_n + 2W_n \\ V_{n+1} = -U_n + V_n + 2W_n \\ W_{n+1} = -U_n - V_n + 4W_n \end{cases}$$

où $U_0 = 2, \quad V_0 = -1$ et $W_0 = 3$