UNIVERSITÉ DE CARTHAGE

IHEC Carthage

Session Principale Mai2019

EPREUVE DE MATHS

EXERCICEN°1(3pts)

Soit A matrice d'ordre 3

Répondre par vrai ou faux *Sans* justification les affirmations suivantes :

1) Toute matrice A diagonalisable est inversible
2) Si det $(A+2I_3)=0$ Alors -2 *est une valeur propre de A*
3) $\det(5A) = 5 \times \det(A)$

EXERCICEN°2(12pts)

PARTIEA On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} S=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} ; T=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$; Q=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad K=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad et V=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1)a)Calculer transposée de A noté t_A et Trace de A noté tr(A)

b) Justifier que A est diagonalisable .

c) Calculer det $(A+I_3)$, que peut – on déduire ?

d) Calculer A .V , que peut – on déduire ?

2)a) Déduire les valeurs propres de A .

b) Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}

3) a)Calculer la matrice diagonale $D = P^{-1}A\,P$

b) On donne B= $A^3 - 2A + I_3$ Montrer que B est diagonalisable et déduire les valeurs propres de B

PARTIE B

1) a)Calculer T.Q

b) Déduire que T est inversible et calculer T^{-1}

c)On admet que $T^{-1}.S.T$ = K Calculer $K^n puis$ S^n en fonction de n pour tout n $\in N$

2) a) Déterminer une matrice J telle-que : $A=I_3 + 2J$

b) Vérifier que $J^2 = 2I_3 + J$

3) a)Soient (a_n) *et* (b_n)*deux suites*; avec $a_0 = 1\ et b_0 = 0$ et que $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases}$

Montrer par récurence que pour tout $n \in N$ On a : $A^n = a_n I_3 + b_n\ J$

b)On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ vérifier que $U_{n+1} = S\ U_n$ et déduire que $U_n = S^n U_0$

c) Déterminer a_n et b_n en fonction de n

d) Déduire l'expression de A^n en fonction de n

EXERCICEN°3(5 pts)

Soit A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **avec a** $\in R$

1) Calculer det A
2) On donne le système (S) :

$$(S)\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = a - 1 \\ 2x + 2y + 4\,z = 2 \end{cases}$$

i) Pour quelles valeurs de a le système (S) est de Gramer ?

ii) Lorsqu'il est de Gramer , résoudre (S)avec la méthode deGramer