

Devoir Final

Matière : Probabilité

Niveau : 1^{ère} année LFG

Durée : 2heures

*Aucun document ni support de cours n'est autorisé.*Exercice 1 (6 points)

Deux lignes téléphoniques L1 et L2 aboutissent à un standard. On désigne par O_i l'événement $O_i = \ll \text{la ligne } i \text{ est occupée} \gg$, pour $i=1,2$

On donne : $P(O_1) = 0,6$ $P(O_2) = 0,4$ et $P(O_1 \cap O_2) = 0,1$

Déterminer la probabilité des événements suivants :

- 1/ $A_1 = \ll \text{Une ligne au moins est occupée} \gg$ (1 point)
- 2/ $A_2 = \ll \text{Les deux lignes sont libres} \gg$ (1 point)
- 3/ $A_3 = \ll \text{Une seule ligne est occupée} \gg$ (1 point)
- 4/ $A_4 = \ll \text{Une ligne au moins est libre} \gg$ (1 point)
- 5/ $A_5 = \ll \text{La ligne L1 est libre et la ligne L2 est occupée} \gg$ (1 point)
- 6/ $A_6 = \ll \text{La ligne L1 est occupée sachant que la ligne L2 est libre} \gg$ (1 point)

Exercice 2 (6 points)

On considère une variable aléatoire X dont la fonction densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = 6(x - x^2) \quad , \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et } f(x) = 0 \text{ sinon}$$

- 1/ Montrer que f est bien une densité de probabilité (1 point)
- 2/ Calculer la probabilité de l'événement : $0,5 < X \leq 1$ (1 point)
- 3/ Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ (1 point)
- 4/ Soit $Y = \sqrt{20} \left(X - \frac{1}{2} \right)$. Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$ (1 point)
- 5/ On pose $Z = X^2$
 - a/ Exprimer la fonction de répartition G de la variable Z , en fonction de la fonction de répartition F de la variable X . (1 point)
 - b/ En déduire la densité de probabilité g de la variable aléatoire Z . (1 point)

Exercice 3 (5 points)

On lance simultanément deux dés, l'un rouge l'autre vert, et on note X le produit des deux résultats obtenus.

1/ Quelles sont les valeurs possibles pour X ? (1 point)

2/ On désigne par A l'évènement $A = \{X = 12\}$. Calculer $P(A)$ (1 point)

3/ On lance simultanément les deux dés, 30 fois de suite, et on désigne par Y le nombre de fois où l'évènement A se produit.

a/ Donner la loi de Y

$$X \sim B(n=30, P=\frac{1}{9})$$

(1 point)

b/ Calculer $P(Y=1)$, $P(Y=5)$, et $P(Y=30)$. (1 point)

c/ Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$ (1 point)

Exercice 4 (3 points)

La probabilité de naissance d'un enfant est de 0,48 pour les garçons et de 0,52 pour les filles. On sait par ailleurs que 2% des filles présentent à la naissance une maladie X , contre 1% pour les garçons. La réponse aux questions suivantes devra mettre en évidence explicitement les évènements concernés.

1. Calculer la probabilité qu'un nouveau-né présente la maladie. (1 point)

2. Calculer la probabilité qu'un nouveau-né présentant la maladie soit un garçon. (1 point)

3. Calculer la probabilité d'obtenir un garçon non atteint de la maladie. (1 point)