

Exercice 1 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- 1) Déterminer les valeurs propres de A .
- 2) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres.
- 3) Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
- 4) Soit $B = aA^2 + bA + cI$ où I est la matrice identité d'ordre 3
Montrer que B est diagonalisable et donner ses valeurs propres à l'aide de a , b et c .
- 5) Montrer que A est inversible et que A^{-1} est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres de A^{-1} .
- 6) Montrer que A est diagonalisable et déduire ses valeurs propres.
- 7) Trouver 3 matrices C vérifiant $C^2 = A$
- 8) Calculer A^n où $n \in \mathbb{N}^*$
- 9) a) Déterminer 2 réels a_n et b_n tels que $\forall X \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a
 $X'' = (X^2 - 3X + 2)Q_n(X) + a_n X + b_n$
b) Retrouver A^n où $n \in \mathbb{N}^*$
- 10) Soient (U_n) , (V_n) et (W_n) 3 suites réelles vérifiant

$$\begin{cases} U_{n+1} = V_n - W_n \\ V_{n+1} = -U_n + 2V_n - W_n \\ W_{n+1} = U_n - V_n + 2W_n \end{cases} \quad U_0 = 0 \quad V_0 = 1 \quad W_0 = -1$$

Exprimer U_n , V_n et W_n en fonction de n

11) Calculer A^{-1}

Exercice 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

- 1) Déterminer les valeurs propres de A .
- 2) A est elle diagonalisable ?

3) On donne $U = (1, 2, -1)$ $V = (2, -1, 1)$ et $W = (1, -1, 1)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Montrer que U et V sont des vecteurs propres de A
 - Exprimer $A.W$ à l'aide de U , V et W
 - Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}
- 4) a) Soit $T = P^{-1}.A.P$ expliciter P^{-1}
- Déterminer la matrice N telle que $T = D + N$ et montrer que N est nilpotente, puis vérifier que $D.N = N.D$
 - Calculer T^n puis déduire A^n . Où $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 3 :

Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 0 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$

1) a) Montrer que $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

b) La matrice A est-elle inversible ?

2) Soient $U = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m^2 \end{pmatrix}$ $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix}$

- Calculer $A.U$, $A.V$ et $A.W$. Que peut-on déduire ?
 - Montrer que $B = (U, V, W)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - Montrer que A est diagonalisable.
- 3) Déterminer a et b tels que $A^2 = aI + bA$ puis exprimer A^{-1} à l'aide de I et A .
- 4) On pose $S = A + I$ et $Q = A - 2I$
- Calculer $S.Q$ et $Q.S$ puis S^2 et Q^2 et en déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$ S^n et Q^n
 - Vérifier que $A = \frac{1}{3}(2S + Q)$.
 - En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression de A^n en fonction de S et Q .

Exercice 4 :

On donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ et $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

On se propose de déterminer les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $A.M + M.A = 0$ où 0 est la matrice nulle.

- 1) Déterminer les valeurs propres de A
- 2) a) A est-elle inversible ?
b) A est-elle diagonalisable ?
- 3) Soit λ une valeur propre de A. démontrer que X_λ est un vecteur propre de A associé à λ

4) On note $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Déterminer une matrice P inversible tel que $A = P.D.P^{-1}$

5) Soit $N = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice $D.N + N.D$

Que dire de N si $D.N + N.D = 0$

- 6) Déterminer l'ensemble des matrices M telles que $A.M + M.A = 0$

Exercice 5 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) a) Justifier que A est diagonalisable.
b) Montrer que 0 n'est pas la seule valeur propre de A.
c) Déterminer les valeurs propres de A.
d) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres.
- 2) a) En classant les valeurs propres en ordre croissant donner une matrice diagonale D et une matrice P inversible telles que $A = P.D.P^{-1}$ (on ne demande pas de calculer P^{-1})

On pose $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L = P.D_1.P^{-1}$ et $M = P.D_2.P^{-1}$

b) Pour tout entier $\forall n \geq 1$. Calculer D^n en fonction de D_1 , D_2 et n .

En déduire $\forall n \geq 1$; A^n en fonction de L , M et n

3) a) Vérifier que l'on peut prendre comme matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer P^2 en déduire P^{-1}

b) déterminer explicitement les matrices L et M définies à la question 2

4) On pose $S_1 = I$ et pour tout entier $n \geq 2$ $S_n = I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$

a) Exprimer pour $n \geq 2$ $S_n.(I - A)$ en fonction de I et A^n

b) Justifier que $(I - A)$ est inversible. En déduire que pour tout $n \geq 1$

$$S_n = (I - A^n)(I - A)^{-1}$$

Exercice 6 :

Soit $M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$ où a et b 2 réels

1) Trouver une matrice A telle que $M(a,b) = aI + bA$

2) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}

3) Prouver que la matrice $D(a,b) = P^{-1}.M(a,b).P$ est une matrice diagonale.

4) Montrer que $M(a,b)$ est inversible équivaut $D(a,b)$ inversible.

En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a,b)$ soit inversible.

5) Prouver $[M(a,b)]^2 = I$ si et seulement si $[D(a,b)]^2 = I$

En déduire l'existence de quatre matrices que l'on déterminera vérifiant

$$[M(a,b)]^2 = I$$

Exercice 7 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & m \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ où $n \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que A est diagonalisable.

2) Montrer que $(1-a)$ est une valeur propre de A .

3) Déduire les autres valeurs propres de A (sans calculer le polynôme caractéristique).

4) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de 1^{ère} composante 1.

5) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice P inversible telles que $A = P.D.P^{-1}$

6) Calculer A^n où $n \in \mathbb{N}^*$.

7) a) Montrer que 1 est une valeur propre de B .

b) Déduire les autres valeurs propres.

c) Déterminer les réels m pour lesquels B est diagonalisable.

8) Montrer que $A^3 - 3A^2 + 3(1-a^2)A - (1-a)^2(2a+1)I = 0$ (sans calculer A^2 et A^3).

Diagonalisation

exercice 1

$$\textcircled{1} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1-\lambda & -1+\lambda \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (2-\lambda)$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ est une VP double de A

$\Rightarrow \lambda = 2$ est une valeur propre de A.

$$\textcircled{2} E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = x\}$$

M n'est pas inversible

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = x \\ -x + 2y - z = y \\ x - y + 2z = z \end{cases}$$

c'est une valeur propre

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y = x + z \end{cases}$$

$$x \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = (x; x+z; z) = (x; x; 0) + (0; z; z) = x(1; 1; 0) + z(0; 1; 1)$$

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = x\} = \langle u, v \rangle$$

$$\bullet E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = 2x\} = \langle w \rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - z = 2x \\ -x + 2y - z = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -x \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = (x; x; -x) = x(1; 1; -1)$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} \dim E_1 = 2 = 2 \text{ (multiplicité)} \\ \dim E_2 = 1 = 1 \text{ (multiplicité)} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} A \text{ est diagonalisable} \end{array} \right.$$

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P \Leftrightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

matrice diagonale.
 - détermine par valeurs propres
 - détermine ses vecteurs propres

avec $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(4) soit $B = aA^2 + bA + cI$

car $A = PDP^{-1}$

$\Rightarrow B = a(PDP^{-1})^2 + b(PDP^{-1}) + cI$

$= a P D^2 P^{-1} + b P D P^{-1} + c P I P^{-1}$

$\Rightarrow B = P(a D^2 + b D + c I) \cdot P^{-1}$

D'

avec $D' = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Les termes
de diagonale
sont les
vp.

$= \begin{bmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & 4a+b+c \end{bmatrix}$

$\Rightarrow B$ est diagonalisable

$-\lambda = a+b+c \Rightarrow 0$ est une valeur propre de B

$-\lambda = 4a+b+c \Rightarrow$ est une valeur propre de B

$E_{a+b+c} = \langle u, v \rangle$

$E_{4a+b+c} = \langle w \rangle$

(5) $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, 1, 2 = 2 \neq 2$

on sait que $A = PDP^{-1}$

alors $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1}$

$\&^o$ inverse du produit $(AB^{-1}) = B^{-1} \cdot A^{-1}$

(sens inverse) $E(AB) = {}^t B \cdot {}^t A$

$\Rightarrow A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1} D^{-1} \cdot P^{-1}$

avec $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

alors A^{-1} est diag

$\Rightarrow \lambda = 1$ est une valeur propre de A^{-1}

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

double
simple A^{-1}

$\Rightarrow E_1 = \langle u, v \rangle$

$\Rightarrow E_2 = \langle w \rangle$

$$⑥ \quad A = P D P^{-1}$$

$$tA = t(P D P^{-1}) = t(P^{-1}) \cdot tD \cdot tP \\ = tP^{-1} \cdot D \cdot tP$$

tA est diag

$\lambda = 1$ est une VP double de tA
 $\lambda = 2$ est une VP Simple de tA

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\text{com}(P) = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \Rightarrow P \text{ est inversible}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = - \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors $tP^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
 $E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$⑦ \quad A^n = (P D P^{-1})^n = (P D P^{-1}) (P D P^{-1}) \dots (P D P^{-1}) \\ = P D^n P^{-1}$$

avec $D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$

$$⑧ \quad C^2 = A$$

on pose $C = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} P^{-1}$

$$C^2 = P \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1^2 = 1 \\ \lambda_2^2 = 1 \\ \lambda_3^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{donc } C = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$\text{ou } C = P \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} P^{-1}$$

⑨ a/ $x^n = (x^2 - 3x + 2) \cdot Q_n(x) + a_n x + b_n$

Pour $x = 1$: $1 = a_n + b_n$

Pour $x = 2$: $2^n = 2a_n + b_n$

$\begin{cases} 1 = a_n + b_n & (1) \\ 2^n = 2a_n + b_n & (2) \end{cases}$

$(2) - (1) \Rightarrow a_n = 2^n - 1$

$2(2^n - 1) - (2^n - 1) = b_n = 2 - 2^n$

$x^n = (x^2 - 3x + 2) Q_n(x) + (2^n - 1)x + (2 - 2^n)$

b/ on pose $x = A$

$\Rightarrow A^n = (A^2 - 3A + 2I) Q(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$

vérifier que $A^2 - 3A + 2I = 0$

on a : $B = aA^2 + bA + cI$

on pose : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$

$B D' P^{-1}$ avec $D' = \begin{bmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & 4a+2b+c \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow D' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

donc $A^2 - 3A + 2I = 0$ alors $A^2 - 3A + 2I = 0$

alors $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$ $A^n = \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix}$

⑩ $\begin{cases} U_{n+1} = V_n - W_n \\ V_{n+1} = U_n + 2V_n - W_n \\ W_{n+1} = U_n - V_n + 2W_n \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow X_{n+1} = A X_n$ alors $X_n = A^n X_0$ avec $X_0 = \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(11)

(5)

Polynôme caractéristique : $P_A(\lambda) = 0$

$$\text{on a } A^2 - 3A + 2I = 0 \Rightarrow 2I = -A^2 + 3A$$

$$I = -\frac{1}{2}A^2 + \frac{3}{2}A = A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I\right) = \left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I\right)A$$

$$\text{donc } A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I$$

exercice 2

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 9 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{1} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 7 \\ 0 & 6-\lambda & 9 \\ 1 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 9 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)[(6-\lambda)(-3-\lambda) + 18] + 5(-3-\lambda) + 14$$

$$= (-2-\lambda)(-18 - 6\lambda + 3\lambda + 12 + 18) - 1 - 5\lambda$$

$$= (-2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) - 1 - 5\lambda$$

$$= -2\lambda^2 + 6\lambda - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 1 - 5\lambda$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = \lambda^2(1-\lambda) + (\lambda-1)$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = -(1-\lambda^2)(\lambda+1)$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ est une VP double de A

$\lambda = -1$ est une VP simple de A

$$\textcircled{2} E_1 = \{ X \in \mathbb{R}^3 / AX = X \} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\dim E_1 = 1 \neq 2$ (multiplicité)

$\Rightarrow A$ n'est pas diag. (n'est pas en relation avec une matrice diagonale)

$\textcircled{3} Au = u \Rightarrow u$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda = 1$
 $Av = -v \Rightarrow v$ est un vecteur propre de A associé à la VP $\lambda = -1$
 $Aw = a u + b v + c w$

$$AW = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = 0 & (1) \\ 2a - b - c = 2 & (2) \\ -a + b + c = -1 & (3) \end{cases}$$

$$(2) + (3) \Rightarrow a = 1$$

$$(1) - (3) \Rightarrow 3a + b = 2 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

$$(1) \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

d'où

$$AW = U - V + W$$

$$C/P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \det P = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{P est inversible.}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \text{com}(P)$$

$$\text{com}(P) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(4) a/ T = P^{-1} A \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b/ T = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_D + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_N$$

$N^2 = 0 \rightarrow N$ est nilpotente d'ordre 2; $\forall n \geq 2, N^n = 0$

$DN = ND$ (commutativité par binôme de Newton)

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k N^k D^{n-k} = \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} n D^{n-1} N + \underbrace{\binom{n}{2} n(n-1) D^{n-2} N^2 + \dots}_{=0}$$

$$\boxed{T^n = D^n + n N D^{n-1}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix}$$

$$T = P^{-1} A P \Rightarrow A = P T P^{-1} \text{ donc } A^n = P T^n P^{-1}$$

exercice 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \\ m^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad m \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \det A &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \\ m^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m \cdot \frac{1}{m} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow A \text{ est inversible.} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ m^2 \\ m \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$$

a/ $A \cdot U = 2U \Rightarrow U$ est un vecteur propre de A associée à la valeur propre $\lambda = 2$

$A \cdot V = -V \Rightarrow V$ est un vecteur propre de A associée à la valeur propre $\lambda = -1$

$A \cdot W = -W \Rightarrow W$ est un vecteur propre de A associée à la valeur propre $\lambda = -1$

$\lambda = -1$ est une vp double de A
 $\lambda = 2$ est une vp simple de A .

$$\begin{aligned} \text{b/ } \det(U, V, W) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m^2 & 0 & 1 \\ m & m & m \end{vmatrix} = -m \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \\ -m & m & 1 \end{vmatrix} \\ &= -m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & -m & 1 \\ -m & 2m & 1 \end{vmatrix} = -m \begin{vmatrix} m & 1 \\ 2m & 1 \end{vmatrix} = 3m^2 \neq 0 \end{aligned}$$

alors (U, V, W) est une f.l. et par suite (U, V, W) est une base de $\mathbb{R}^3$

c/ $\dim E_{\lambda=2} = 1$ (multiplicité)
 $\dim E_{\lambda=-1} = 2$ (multiplicité) $\Rightarrow A$ est diagonalisable

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad A &= aI + bA \\ 2I &= A^2 - A \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{2} A = A \left(\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} I \right) = \frac{1}{2} A \cdot \frac{1}{2} I \end{aligned}$$

exercice 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et } \lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad p_1(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda - 11 & 6 \\ 6 & 0 & 6 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -11 & 6 - \lambda \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 6 & 6 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda [-\lambda(6 - \lambda) + 11] + 6 = -\lambda^2(6 - \lambda) - 11\lambda + 6 \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 \\ &= (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) \end{aligned}$$

$\lambda = 1$ est une VP simple.
 $\lambda = 2$ " "
 $\lambda = 3$ " "

$\textcircled{2}$ a/ puisque les VP $\neq 0$ alors A est inversible.
 b/ puisque les VP sont simples $\Rightarrow A$ est diagonalisable.

$$\textcircled{3} \quad A X_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ 6 - 11\lambda + 6\lambda^2 \\ 6\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$$

b) pour $\lambda = 1$

$$A X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow X_1$ est un vecteur propre de A associé à la VP $\lambda = 1$

pour $\lambda = 2$

$$A X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 X_2 \Rightarrow X_2 \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } \lambda = 2$$

$$\text{pour } \lambda = 3 \quad A X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 X_3$$

X_3 est un vecteur propre de A associé à la VP $\lambda = 3$

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = \lambda^3$$

$\textcircled{4}$ Puisque A est diag. Alors il existe une matrice P inversible

$$D = P^{-1} A P \Leftrightarrow A = P D P^{-1}$$

avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

$$(5) DN + ND = \begin{pmatrix} 2P & 3Q & 4R \\ U & S & 6U \\ 6V & 7W & 6Z \end{pmatrix} DN + ND = 0 \Rightarrow \begin{cases} P=0 \\ Q=0 \\ \vdots \end{cases} \textcircled{9}$$

$$(6) \quad N=0$$

$$AM + MA = 0$$

$$DN + ND = 0$$

$$P^{-1}APN + NP^{-1}AP = 0$$

$$\Rightarrow APN + PNP^{-1}AP = P \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{APN}_{M} + \underbrace{PNP^{-1}A}_{M} = 0 \Rightarrow MA + AM = 0 \text{ d'où } M = PNP^{-1}$$

exercice 5

(1) a/ Puisque A est symétrique donc A est diag.

$$b/ \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

donc A n'est pas inversible.

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \text{ avec } \lambda_1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -\lambda_2$$

alors 0 n'est pas la seule vp

$$c/ P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 4) + 4 + 4\lambda$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 4 - \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 4 + 4\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda = \lambda(9 - \lambda^2) = \lambda(3 - \lambda)(3 + \lambda)$$

$\lambda = 0$ est une vp simple

$$\lambda = 3$$

''

''

$$\lambda = -3$$

''

''

$$d/ E_{-3} = \{ x \in \mathbb{R}^3 / Ax = -3x \} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_0 = \{ x \in \mathbb{R}^3 / Ax = 0x = 0 \} = \mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_3 = \{ x \in \mathbb{R}^3 / Ax = 3x \} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(2) a/ A est diag^o tq. $D = P^{-1} A P \Leftrightarrow A = P D P^{-1}$ (10)

avec $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = P D_1 P^{-1}$$

b/ $D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

$$= (-3)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D_1 \quad D_2$

$$A = P D P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = (P D P^{-1})^n = P D^n P^{-1} = P ((-3)^n D_1 + 3^n D_2) P^{-1}$$

$$A^n = (-3)^n P D_1 P^{-1} + 3^n P D_2 P^{-1} = (-3)^n L + 3^n M$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9 I$$

$$I = \frac{1}{9} P^2 = P \left(\frac{1}{9} P \right) = \left(\frac{1}{9} P \right) P \Leftrightarrow \text{donc } P^{-1} = \frac{1}{9} P$$

(4) $S_1 = I$

$$S_n = I + A + A^2 + \dots + A^{n-1} + A^n$$

a/ $S_n = (I - A) = (I + A + A^2 + \dots + A^{n-1})(I - A)$

$$= I + A + A^2 + \dots + A^{n-1} - A - A^2 - A^3 - \dots - A^{n-1} - A^n$$

b) $I - A = P \cdot I P^{-1} = P D P^{-1}$

$$= P (I - D) P^{-1}$$

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$I = -A \text{ est diag}^o$$

$$\lambda = 4 \text{ est une vp simple}$$

$$\lambda = -2$$

$$S_n (I - A) = I - A^n$$

$$S_n (I - A) (I - A)^{-1} = (I - A)^n (I - A)^{-1} \Leftrightarrow S_n = (I - A^n) (I - A)^{-1}$$

exercice b

$$M(a, b) = \begin{bmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{1} M(a, b) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & -b & -2b \\ 2b & -b & -4b \\ -b & b & 3b \end{bmatrix}$$

$$= a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = M(a, b) = aI + bA$$

$$\textcircled{2} P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3 \neq 0$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \text{com}(P) \Rightarrow P \text{ est inversible}$$

$$\text{com}(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} D(a, b) = P^{-1} M(a, b) P = P^{-1} (aI + bA) P$$

$$= a P^{-1} I P + b P^{-1} A P$$

$$= a I + b (P^{-1} A P)$$

$$= \begin{bmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{bmatrix}$$

Question : En déduire que M est diagonalisable et déduire les valeurs propres et les vecteurs propres associés.

Puisque M en relation avec matrice diagonalisable alors M est diag.

$\lambda = a+2b$ est une vp de $M(a, b) \Rightarrow E_{a+2b} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda = a+b \parallel \Rightarrow$

$$\textcircled{4} M(a, b) = P D(a, b) P^{-1}$$

$M(a, b)$ est inversible $\Rightarrow \det M(a, b) \neq 0$

$\Rightarrow \det (P D(a, b) P^{-1}) \neq 0$

$\Rightarrow \det P \det D(a, b) \det P^{-1} \neq 0$

$\Rightarrow \det P \det D(a, b) \frac{1}{\det P} \neq 0$

$\Rightarrow D(a, b)$ est inversible

$\Rightarrow (a+2b)(a+b) \neq 0$

$\Rightarrow a+2b \neq 0$ et $a+b \neq 0$

$a \neq -2b$ et $a \neq -b$

$$(5) M(ab)^2 = I \Leftrightarrow (P D(ab) P^{-1})^2 = I$$

$$\Leftrightarrow P D(ab)^2 P^{-1} = I$$

$$\Leftrightarrow D(ab)^2 = P^{-1} I P = I$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (a+2b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+2b)^2 = 1 \\ (a+b)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b = \pm 1 \\ a+b = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b = 1 \\ a+b = 1 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} a+2b = 1 \\ a+b = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b = 1 \\ a+b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b = -1 \\ a+b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b = -1 \\ a+b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$M(1, 0) \quad M(-3, 2) \quad M(3, -2)$$

exercice 3

1) $S = A + I$ ①
 $Q = A - 2I$ ② $A^2 = A + 2I$

a) $SQ = (A + I)(A - 2I)$
 $= A^2 - 2A + A - 2I$
 $= A^2 - A - 2I = A + 2I - A - 2I = 0$

$QS = (A - 2I)(A + I) = 0$

$S^2 = (A + I)^2 = A^2 + 2A + I$
 $= A + 2I + 2A + I$
 $= 3A + 3I = 3(A + I) = 3S$

$S^n = 3^{n-1} S \quad \forall n \geq 1$ (il faut la démontrer par récurrence)

* $Q^2 = (A - 2I)^2 = A^2 - 4A + 4I$
 $= A + 2I - 4A + 4I$
 $= -3A + 6I$
 $= -3(A - 2I) = -3Q$

$Q^n = (-3)^{n-1} Q \quad \forall n \geq 1$ (il faut la démontrer par récurrence)

b) $2 \times \text{①} + \text{②} \Rightarrow 2S + Q = 3A \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{1}{3}(2S + Q)}$

c) $A^n = \left[\frac{1}{3} (2S + Q) \right]^n = \left(\frac{1}{3} \right)^n (2S + Q)^n$
 $= \left(\frac{1}{3} \right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2S)^k Q^{n-k}$

$= \left(\frac{1}{3} \right)^n \left[\binom{n}{n} Q^n + \underbrace{\binom{n}{n-1} (2S) Q^{n-1}}_{=0} + \underbrace{\binom{n}{n-2} (2S)^2 Q^{n-2}}_{=0} + \dots + \underbrace{\binom{n}{1} (2S)^{n-1} Q}_{=0} + \binom{n}{0} (2S)^n \right]$

$= \left(\frac{1}{3} \right)^n [Q^n + (2S)^n]$

$= \left(\frac{1}{3} \right)^n [-3^{n-1} Q + 2^n 3^{n-1} S]$

exercice 6

$$M(a; b) = \begin{bmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad M(a; b) &= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b & -b & -2b \\ 2b & -b & -4b \\ -b & b & 3b \end{bmatrix} \\ &= a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_A \end{aligned}$$

$$M(a; b) = a I + b A$$

$$(2) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 + L_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \neq 0 \Rightarrow P \text{ est inversible.}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \text{com}(P)$$

$$(3) \quad \text{com}(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad D(a; b) &= P^{-1} M(a; b) \cdot P = P^{-1} (aI + bA) P = a P^{-1} P + b P^{-1} A P \\ &= a I + b (P^{-1} A P) \\ &= \begin{bmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En déduire que M est diagonalisable et déduire les VAP et les vecteurs propres associés

Puisque M est en relation avec une matrice diagonalisable, alors A est diagonalisable.

$$\lambda = a + 2b \text{ est une valeur propre de } M(a; b) \rightarrow E_{a+2b} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\lambda = a + b \text{ est une valeur propre de } M(a; b)!$$

$$\Rightarrow E_{a+b} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

④ $M_{(ab)} = P D_{(ab)} \cdot P^{-1}$

$M_{(ab)}$ est inversible
 $\Rightarrow \det M_{(ab)} \neq 0$
 $\Rightarrow \det (P D_{(ab)} P^{-1}) \neq 0$
 $\Rightarrow \det P \det D_{(ab)} \det P^{-1} \neq 0$
 $\Rightarrow \det P \det D_{(ab)} \frac{1}{\det P} \neq 0$

$\det D_{(ab)} \neq 0$
 $\Rightarrow D_{(ab)}$ est inversible.

⑤ $\Rightarrow (a+2b)(a+b)^2 \neq 0$

$(a+2b) \neq 0$ et $a+b \neq 0$

$a+2b \neq 0$ et $a \neq -b$

⑤ $M_{(ab)}^2 = I \Leftrightarrow (P D_{(ab)} P^{-1})^2 = I$

$= P D_{(ab)}^2 P^{-1} = I$

$\Rightarrow D_{(ab)}^2 = P^{-1} I P = I$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} (a+2b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} (a+2b)^2 = 1 \\ (a+b)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b = \pm 1 \\ a+b = \pm 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+2b=1 \\ a+b=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b=1 \\ a+b=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b=-1 \\ a+b=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b=-1 \\ a+b=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$

$M_{(1;0)}; M_{(-1;0)}; M_{(3;-2)}; M_{(3;-2)}$

exercice 4

16

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

① Puisque A est symétrique alors elle est diagonalisable

② $P_A(1-a) = 0$

$$P_A(1-a) = \det(A(1-a)I) = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda = 1-a$ est une valeur propre de A

③ $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$

$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ avec $\lambda_1 = 1-a$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2a & a & a \\ 1+2a & 1 & a \\ 1+2a & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+2a) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (1+2a) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= (1+2a)(1-a)^2$$

et $\text{tr}(A) = 1+1+1 = 3$

alors $\begin{cases} (1-a)\lambda_2 \lambda_3 = (1+2a)(1-a)^2 \\ 1-a + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 \cdot \lambda_3 = (1+2a)(1-a) \\ \lambda_2 + \lambda_3 = a+2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 1+2a$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 1-a$$

$\Rightarrow \lambda = 1+2a$ est une VP simple de A

$\lambda = 1-a$ est une VP double de A

① $E_{1+2a} = \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = (1+2a)x\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (1+2a) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + ay + az = (1+2a)x \\ ax + y + az = (1+2a)y \\ ax + ay + z = (1+2a)z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 & ① \\ x - 2y + z = 0 & ② \\ x + y - 2z = 0 & ③ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2ax + ay + az = 0 \\ ax - 2ay + az = 0 \\ ax + ay - 2az = 0 \end{cases}$$

① - ② $\Rightarrow -3x + 3y = 0 \Rightarrow y = x$

① - ③ $\Rightarrow -3x + 3z = 0 \Rightarrow z = x$

$E_{1-a} = \{x \in \mathbb{R}^3 / Ax = (1-a)x\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + ay + az = (1-a)x \\ ax + y + az = (1-a)y \\ ax + ay + z = (1-a)z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + ay + az = 0 \\ ax + ay + az = 0 \\ ax + ay + az = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = -y - z \end{cases}$$

$$\begin{aligned}x &= (xy z) = (-y-3; y; 3) \\&= (-y, y, 0) + (-3; 0; 3) \\&= -y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\&\Rightarrow E_{1a} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = (1-a)x\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle\end{aligned}$$

⑤ Puisque A est diag alors $A = PDP^{-1}$
avec $D = \begin{bmatrix} 1+2a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

⑥ $A^n = (PDP^{-1})^n = \underbrace{(PDP^{-1})}_{I} \underbrace{(PDP^{-1})}_{I} \dots \underbrace{(PDP^{-1})}_{I}$
 $= P D^n P^{-1}$ avec $D^n = \begin{bmatrix} (1+2a)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1-a)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^n \end{bmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \text{tr}(P) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\det P = 1 \neq 0 \Rightarrow P$ est inversible

⑦ On sait que $P_A(A) = 0$
or $P_A(A) = [(1+2a)I - A][(1-a)I - A]^2$
 $\Rightarrow P_A(A) = [(1+2a)I - A][(1-a)I - A]^2 = 0$

$\Rightarrow [(1+2a)I - A][(1-a)^2 I - 2(1-a)A + A^2] = 0$

$\Leftrightarrow (1+2a)(1-a)^2 I - 2(1+2a)(1-a)A + (1+2a)A^2 - (1-a)^2 A + 2(1-a)A^2 - A^3 = 0$
 $\Leftrightarrow (1+2a)(1-a)^2 I - (1-a)(2(1+2a) + (1-a))A + (1+2a+2-2a)A^2 - A^3 = 0$
 $\Leftrightarrow (1+2a)(1-a)^2 I - (1-a)(3+2a)A + 3A^2 - A^3 = 0$
 $\Leftrightarrow (1+2a)(1-a)^2 I - 3(1-a)A + 3A^2 - A^3 = 0$

Question : Moy que A est inversible et calculer A en fonction de A², A et I

Pour quelle valeur a, la matrice est inversible

$(1+2a)(1-a)^2 I = A^3 - 3A^2 + 3(1-a^2)A$

$a \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{(1+2a)(1-a)^2} A^3 - \frac{3}{(1+2a)(1-a)^2} A^2 + \frac{3(1+a)}{(1+2a)(1-a)} A$

$= A \left[\frac{1}{(1+2a)(1-a)^2} A^2 - \frac{3}{(1+2a)(1-a)^2} A + \frac{3(1+a)}{(1+2a)(1-a)} I \right]$

$= \left[\dots \right] A$

$\Rightarrow A$ est inversible. $A^{-1} = \left[\dots \right]$



$P_B(1) = 0$
 or $P_B(1) = \det(B - I) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & m \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

colinéaire

$\lambda = 1$ est une vp de B .

b) $\begin{cases} \det B = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ \text{tr}(B) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$ avec $\lambda_1 = 1$

or $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$\text{tr}(B) = 1 + 2 + 3 = 6$

Donc $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$

$$\text{B} \quad \begin{cases} x + 2y + z = 1 - 2m \\ x + 2y + z = -2 \end{cases} \quad x = -2 - x_3$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{(-2 - \lambda_3) \lambda_3}{\lambda_3^2 + 2\lambda_3 + 1 - 2m} = 1 - 2m$$

$$\Delta = 4 - 4(1 - 2m) = 8m.$$

$$\lambda'_3 = \frac{-2 - \sqrt{8m}}{2} = -1 - \sqrt{2m}$$

$$\lambda_3 = -1 + \sqrt{2}m$$

$\lambda_1 = 1$ est une V.P.

$$\lambda = -1 - \sqrt{2m}$$

$$x = -1 + \sqrt{2}m //$$

c/ $1 = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ $\Rightarrow v_{\text{em}} = -c \text{ imp.}$

$$1 = -1 + \sqrt{2m} \Rightarrow \sqrt{2m} = 2 \Rightarrow m = 2$$

1^{er} cas : si $m \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\} \Rightarrow$ Les valeurs propres simples $\Rightarrow$ est diagonalisable

$$2^{\text{ene}} \cos \sin = 0$$

$\lambda = -1$ est une v.p. double.

$d = 1$ est une VP simple

$$E_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Bx = -x\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$X = (x_i, x_i, -x) = X(1; 1; -1)$$

$$E_{-1} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \dim E_{-1} = 1 \neq 2 \text{ (mult)}$$

$-1 \neq 1 \neq \lambda$ (multi)
 $\Rightarrow B$ n'est pas diagonalisable.

3^{ème} cas. Si $m = 2$

$\lambda = 1$ est une vp double de B.

 $\lambda = -3$ " simple B

$$t_1 = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid BX = X \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = x \\ 2x - 3y + 2z = y \\ -x + 2y = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 2y - z}$$

$$\begin{aligned}
 X = (x \ y \ z) &= (2y - z \ ; \ y \ ; \ z) \\
 &= (y \ ; \ y \ ; \ 0) + (-z \ ; \ 0 \ ; \ z) \\
 &= y(2 \ ; \ 1 \ ; \ 0) + z(-1 \ ; \ 0 \ ; \ 1)
 \end{aligned}$$

$$E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim E_1 = 2 = 2(\text{mult})$$

$\Rightarrow$ Best diag.

UGET