

Exercice n° 1 :

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère

Les vecteurs : $U = (-2, 3, 7)$; $V = (1, -2, -3)$ et $W = (-1, -1, 6)$

Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par (U, V, W)

1/a) Montrer que W est combinaison linéaire de U et V .

b) Trouver 3 réels a, b et c tels que $E = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ 2/a) Soit

$$Z = (m^2 + m + 1; 4m - 2m^2; -10m^2 - 7m) \text{ où } m \in \mathbb{R}$$

Trouver m pour que Z soit combinaison de U et W .

b) Pour les valeurs trouvées exprimer Z à l'aide de U et W .

Exercice n° 2 :

1) On donne les ensembles suivants :

$$E_1 = \{X = (a - b + c; a + b - c; 2a + 3b) \mid a, b, c \text{ réels}\}$$

$$E_2 = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$$

$$E_3 = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0; y + z = 0; z + t = 0 \text{ et } t + x = 0\}$$

$$E_4 = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2019} \text{ et } 2x - 5y + z - t = 0\}$$

$$E_5 = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x + y| = |y - z|\}$$

a) Indiquer parmi les ensembles ci-dessus ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

b) Donner la dimension de chaque sous-espace

2) Soit $F_m = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{telques } (2m + 1)x - (m^2 + 1)y - (5m + 1)z + m^2 - 4m - 5 = 0\}$

a) Déterminer les valeurs de m pour les quelles F_m est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

b) Donner une base des sous-espaces trouvés.

Exercice n° 3 :

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique

$B^c = (e_1, e_2, e_3)$ on considère les vecteurs

$$U = (1, a, a^2) \quad V = (1, b, b^2) \quad \text{et} \quad W = (1, c, c^2) \quad \text{où } a, b, c \text{ trois réels deux à deux distincts}$$

1) Montrer que $B = (U, V, W)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

2) Exprimer e_1, e_2 et e_3 à l'aide de U, V et W

3) Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ Déduire les composantes de X dans la base $B = (U, V, W)$

4) Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par (U, V) vérifier que

$$E = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{telque } (ab)x - (a+b)y - z = 0\}$$

5) Montrer que $W \in E \iff (a = b = c)$

Exercice n° 4 :

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique

$B^c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ on considère les vecteurs

$$U = (1, 2, -1, 0) \quad \text{et} \quad V = (3, -1, 1, 1)$$

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (U, V)

1/a) Donner la dimension de H

b) Soit $W = (7, 0, 2, 2)$. W appartient-il à H ?

2/a) Soit $Z = (3, a, b, 2)$. Déterminer a et b pour que $Z \in H$

b) Pour les valeurs de a et b trouvées, déterminer les composantes de Z dans la base (U, V) .

3/ Soit $T = (1, 1, 1, 1)$.

a) Montrer que $B = (U, V, T, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$

b) Soit $X = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$

Exprimer X en fonction de U, V, T, e_4 et déduire les composantes de X dans B .

c) Déduire les composantes des vecteurs de la base canonique dans B .

$$x+y = (x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2) \stackrel{?}{\in} E_2$$

$$(z_1+z_2)[(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2] = (z_1+z_2)(x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+y_1^2+y_2^2+2y_1y_2)$$

$$= \underbrace{z_1(x_1^2+y_1^2)}_{=0} + \underbrace{z_1(x_2^2+2x_1x_2+y_2^2+2y_1y_2)}_{\neq 0} + \underbrace{z_2(x_2^2+y_2^2)}_{=0} +$$

$$z_2(x_1^2+2x_1x_2+y_1^2+2y_1y_2)$$

$$\neq 0$$

$$\Rightarrow x+y \notin E_2$$

d'où E_2 n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

$$E_3 = \{x, y, z, t \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0; y+z=0; z+t=0 \text{ et } t+x=0\}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \Rightarrow \boxed{x=-y} \\ y+z=0 \Rightarrow \boxed{z=-y} \\ z+t=0 \Rightarrow \boxed{t=-z=-y} \\ t+x=0 \end{cases}$$

$$X = (x; y; z; t) = (-y; y; -y; y) = y(-1; 1; -1; 1)$$

$$E_3 = \langle u \rangle \Rightarrow \dim E_3 = 1$$

$$E_4 = \{x, y, z, t \in \mathbb{R}^4 \mid \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2019} \text{ et } 2x - 5y + z - t = 0\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{5} \text{ et } \frac{x}{2} = \frac{z}{2019} \text{ et } 2x - 5y + z - t = 0$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{5} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{2019} \\ 2x - 5y + z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{2}x \\ z = \frac{2019}{2}x \\ t = 9099x \end{cases}$$

$$(xy z t) = (x; \frac{5}{2}x; \frac{20-19}{2}x; 999x) = x(\underbrace{\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; \frac{20-19}{2}; 999}_{\mathcal{U}})$$

$E_4 = \langle \mathcal{U} \rangle \Rightarrow E_4$ est un ssev de $\mathbb{R}^4$ puisque $\mathcal{U} \neq 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \{\mathcal{U}\}$ est une base de E_4

$$\Rightarrow \dim E_4 = 1$$

② $F_m = \{x = (xy z) \in \mathbb{R}^3 / (2m+1)y - (5m+1)z + m - 4m - 5 = 0\}$

$$0_{\mathbb{R}^3} \in F_m \Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 = 0$$

$$m = -1 \text{ ou } m = 5$$

1^{er} cas si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 5\} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \notin F_m$
alors F_m n'est plus un ssev de $\mathbb{R}^3$

2^{ème} cas si $m = -1$

$$F_{-1} = \{x y z \in \mathbb{R}^3 / -x - 2y + 4z = 0\}$$

$$-x - 2y + 4z = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 4z - 2y}$$

$$(x y z) = (-2y + 4z; y; z) = (2y; y; 0) + (4z; 0; z) \\ = y(-2; 1; 0) + z(4; 0; 1)$$

$F_{-1} = \langle \mathcal{U}; \mathcal{V} \rangle$ alors F_{-1} est un ssev de $\mathbb{R}^3$

Montrons $\mathcal{P}(\mathcal{U}; \mathcal{V})$ est une f.l.

$$\text{si } \alpha \mathcal{U} + \beta \mathcal{V} = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

$$\begin{cases} -2\alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{U}; \mathcal{V}) \text{ est une f.l. et par suite } (\mathcal{U}; \mathcal{V}) \text{ est une base de } F_{-1} \\ \Rightarrow \dim F_{-1} = 2$$

3ème cas $m=5$

$$F_5 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 11x - 26y - 26z = 0 \}$$

$$11x - 26y - 26z = 0 \Leftrightarrow \boxed{z = \frac{11}{26}x - y}$$

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (x, y, \frac{11}{26}x - y) = (x, 0, \frac{11}{26}x) + (0, y, -y) \\ &= x(1, 0, \frac{11}{26}) + y(0, 1, -1) \end{aligned}$$

$F_5 = \langle U'; V' \rangle \Rightarrow F_5$ est un ssev de $\mathbb{R}^3$

Maqro $(U'; V')$ est une famille libre

Si $\alpha U' + \beta V' = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$\frac{11}{26}\alpha - \beta = 0$$

$\Rightarrow (U'; V')$ est une famille libre et par suite $(U'; V')$ est une base de F_5

$$\dim F_5 = 2$$

exercice 4

$U = (1, 2, -1, 0)$ $V = (3, -1, 2, 1)$

$H = \langle U, V \rangle$

①

a. Montrons que U et V est une f.l

Si $\alpha U + \beta V = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Alors U et V est une f.l et par suite (U, V) est une base de $H \Rightarrow \dim H = 2$

b) $W = (7; 0; 2; 2) \in H$
 existe-t-il $\alpha; \beta \in \mathbb{R} / W = \alpha U + \beta V$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 7 \\ 2\alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 2 \\ \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 0 \end{cases} \text{ impossible (car si on remplace } \alpha \text{ et } \beta \text{ dans (1)(2)(3) } \\ \text{elles ne sont pas vérifiées)}$$

$\Rightarrow$ Alors $W \notin H$.

② a/

$$Z = (3; a; b; 2)$$

$Z \in H \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / Z = \alpha U + \beta V$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 3 \\ 2\alpha - \beta = a \\ -\alpha + \beta = b \\ \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -3 \\ a = -8 \\ b = 5 \end{cases}$$

b/ $\Rightarrow Z = -3U + 2V$
 $B_{\text{base}}(-3; 2) = (U, V)$

③ $T = (1; 1; 1; 1)$

a/

$B = (U; V; T; e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ (1) s'f.L. (= c'est une base)

Mpruv. $(U; V; T; e_4)$ est une f.L.?

Si $\alpha U + \beta V + \gamma T + \lambda e_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + \gamma = 0 & (1) \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 & (2) \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 & (3) \\ \beta + \gamma + \lambda = 0 & (4) \end{cases}$$

① - ② $\Rightarrow -\alpha + 4\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 4\beta$

① + ③ $\Rightarrow 4\beta + 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -2\beta$

② $\Rightarrow -4\beta + \beta - 2\beta = 0 \Rightarrow -5\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$\alpha = 0$

$\gamma = 0$

④ $\Rightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow (U, V, T, e_n)$ est une A.L. et par suite (U, V, T, e_n) est une base de $\mathbb{R}^4$

b) $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$; X s'écrit d'une manière unique.

$X = a_1 U + a_2 V + a_3 T + a_4 e_4$ avec a_1, a_2, a_3, a_4 sont les composantes du vecteur X dans la base.

$$B = (U, V, T, e_4)$$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 + a_3 = x & (1) \\ 2a_1 - a_2 + a_3 = y & (2) \\ -a_1 + a_2 + a_3 = z & (3) \\ a_2 + a_3 + t = 6 & (4) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow -a_1 + 4a_2 = x - y$$

$$a_1 = 4a_2 - x + y$$

$$(1) + (3) \Rightarrow 4a_2 + 2a_3 = x + z$$

$$2a_2 + a_3 = \frac{x + z}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z - 2a_2$$

$$(3) \Rightarrow -4a_2 + x - y + a_3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z - 2a_2 = z$$

$$3a_2 = \frac{3}{2}x - y - \frac{1}{2}z$$

$$a_2 = \frac{3}{10}x - \frac{1}{5}y - \frac{1}{10}z$$

$$a_1 = \frac{6}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{2}{5}z - x + y$$

$$a_1 = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}z$$

$$a_3 = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}z - \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}z$$

$$a_3 = -\frac{1}{10}x + \frac{2}{5}y + \frac{7}{10}z$$

$$① \Rightarrow a_4 = t - a_2 - a_3$$

$$= t - \frac{3}{10}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{10}z + \frac{1}{10}x - \frac{2}{5}y - \frac{7}{10}z$$

$$a_4 = t - \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y - \frac{3}{5}z$$

$$X = \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}z, \frac{3}{10}x - \frac{1}{5}y - \frac{1}{10}z, -\frac{1}{10}x + \frac{2}{5}y + \frac{7}{10}z, t - \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y - \frac{3}{5}z \right)$$

$$b/ e_1(1; 0; 0; 0) \rightarrow e_1 = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{5} \right)_B$$

$$e_2 = (0; 1; 0; 0) \rightarrow e_2 = \left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5} \right)_B$$

$$e_3 = (0; 0; 1; 0) \rightarrow e_3 = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, \frac{7}{10}, \frac{3}{5} \right)_B$$

$$e_4(0; 0; 0; 1) \rightarrow e_4 = (0, 0, 0, 1)_B$$