

Amani

Exercice 1:

1°) soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Calculer les produits $A.B.C$

2°) a) Soient $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Existe-t-il des matrices X telles que $XT = M$?

b) Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Existe-t-il des matrices Y telle que $YN = I$ ou I est la matrice unité dont l'ordre est à préciser.**Exercice 2:**

On donne les relations

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = 3y_1 - y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} z_3 = 5y_1 + 2y_2 \\ z_4 = 4y_1 - y_2 \end{cases}$$

Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4 en fonction de x_1, x_2 et x_3 à l'aide d'un produit matriciel.**Exercice 3:**

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $F(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$

1°) Calculer A^2, A^3 et A^4 2°) Calculer $F(x)$. $F(y)$ et montrer qu'elle est la même forme.Que peut-on dire de $F(0)$.3°) a) Trouver x telle que $F(x) = A$.b) Montrer que $A \cdot F(x) = F(4x + 1)$ c) Dédurre que $A^n = F(x_n)$ avec $x_n = 4x_{n-1} + 1$ où $x_0 = 0$ 4°) On pose $y_n = x_n + \frac{1}{3}$ a) Montrer que (y_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} termeb) Calculer que x_n en fonction de n et déduire A^n

5°) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Déterminer A telle que $B^2 = a.B$ puis calculer B^3 et plus généralement B^n .b) En remarquant que $F(x) = xB + I_2$ où I_2 est la matrice identité d'ordre. Retrouver A^n .c) Trouver 2 matrices P et Q indépendantes de n telle que $A^n = 4^n.P + Q$.**Exercice 4:**

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et I matrice identité d'ordre 3.

1) a) Calculer A^2 et A^3 .b) Calculer A^n où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 3$ 2) Soit $M(x) = I + x.A + \frac{1}{2}x^2.A^2$ où $x \in \mathbb{R}$.a) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $M(x).M(y) = M(x+y)$ b) Calculer $M(x).M(-x)$ et que peut on déduire?c) Montrer que $M(x)$ est inversible et donner son inverse à l'aide de I, A, A^2 et x puis expliciter $(M(x))^{-1}$.3) Calculer $(M(x))^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ à l'aide de I, A, A^2 et x **Exercice 5:**

Soit $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et I matrice identité d'ordre 3.

1) Calculer A^2 puis déterminer les réels α et β tels que $A^2 = \alpha.A + \beta.I$ 2) Dédurre A inversible et donner A^{-1} à l'aide de A, I puis expliciter A^{-1} .3) Déterminer a et b réels tels que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $X^n = (X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2})Q(X) + aX + b$ 4) Déterminer A^n où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6:

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

On pose $N = M + I$ où I matrice unité d'ordre 3.

1) Montrer que N est nilpotente et préciser son ordre.

2) Calculer M^n où $n \in \mathbb{N}^*$.

2) My M is invertible, calculate M^{-1}

Exercice 7:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$ où I matrice unité d'ordre 3

1) En utilisant B calculer A^n où $n \in \mathbb{N}^*$

2) Soit (U_n) ; (V_n) et (W_n) 3 suites réels définies par

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 2V_n \\ V_{n+1} = V_n + 2W_n \\ W_{n+1} = W_n \end{cases} \quad \text{où } U_0 = 0, V_0 = 1 \text{ et } W_0 = 2$$

Déterminer U_n , V_n et W_n en fonction de n

3) Soit $T = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$ et b et c 2 réels

Soit $M = T + I$ où I matrice unité d'ordre 3

a) Calculer T^2 et trouver S tel que $T^2 = S.T$

b) Calculer T^n où $n \in \mathbb{N}^*$

c) Calculer M^2 et montrer que M^2 s'exprime à l'aide de M et I .

ii) Donner une condition sur S pour que M soit inversible et calculer M^{-1}

d) On suppose que $a+b+c=0$ calculer alors M^n .

9.ii) calculate M^n .

exercise 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

① $(AB)C = D$

$(2,3)(3,3)(3,2) = (2,2)$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \text{ ad. } T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X T = M.$$

$$(2, 3) (2, 3) (2, 3)$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2c & 2a+c & -a+2c \\ -2d & 2b-d & -b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2c = 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \\ 2a+c = 0 \\ -a+2c = 0 \\ -2d = -1 \\ 2b-d = 2 \\ -b+2d = 1 \end{cases}$$

impossible

P n'existe pas une mat.
X tq: $XT = M$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$YN = I$$

$$(2, 3) (3, 2) (2, 2)$$

$$\begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+3c-e & 2a+4c+4e \\ b+3d-f & 2b+4d+4f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+3c-e = 1 & \textcircled{1} \\ 2a+4c+4e = 0 & \textcircled{2} \\ b+3d-f = 0 & \textcircled{3} \\ 2b+4d+4f = 1 & \textcircled{4} \end{cases}$$

$$2 \times (1) - (2) \Rightarrow 2c - 6e = 2$$

$$\boxed{c = 1 + 3e}$$

$$(1) \Rightarrow a = 1 - 3 - 9e + e$$

$$\boxed{a = -2 - 8e}$$

$$2 \times (3) - (4) \Rightarrow 2d - 6f = -1$$

$$\boxed{d = -\frac{1}{2} + 3f}$$

$$(3) \Rightarrow b = \frac{3}{2} - 9f + f \Rightarrow \boxed{b = \frac{3}{2} - 8f}$$

$$y = \begin{bmatrix} -2-8e & 1+3e & e \\ \frac{3}{2}-8f & -\frac{1}{2}+3f & f \end{bmatrix} \forall e, f \in \mathbb{R}$$

exercice

$$S: \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_Y \quad \underbrace{\quad}_A \quad \underbrace{\quad}_X$

$$S \Rightarrow \boxed{y = Ax}$$

$$S': \begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = 3y_1 - y_2 \\ z_3 = 5y_1 + 2y_2 \\ z_4 = 4y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_Z \quad \underbrace{\quad}_B \quad \underbrace{\quad}_Y$

$$y = Ax$$

$$z = By = BAX$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 9 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 9 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} z_1 = 4x_1 + 3x_3 \\ z_2 = 4x_1 + x_3 \\ z_3 = 3x_1 + 11x_2 + 9x_3 \\ z_4 = 5x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

exercice 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{1} A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 22 & -21 \\ -62 & 43 \end{bmatrix} = A^2 \cdot A = A \cdot A^2$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 86 & -85 \\ -170 & 171 \end{bmatrix} = A^3 \cdot A = A \cdot A^3 = A^2 \cdot A^2$$

$$\textcircled{2} f(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix}$$

$$f(x) \cdot f(y) = \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y+1 & -y \\ -2y & 2y+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x+1)(y+1) + 2xy & -y(x+1) - x(2y+1) \\ -2x(y+1) - 2y(2x+1) & 2xy + (x+1)(2y+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3xy + x + y + 1 & -3xy - x - y \\ -6xy - 2x - 2y & 6xy + 2x + 2y + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3xy + x + y + 1 & -(3xy + x + y) \\ -2(3xy + x + y) & 2(3xy + x + y) + 1 \end{bmatrix}$$

$$= f \cdot (3xy + x + y)$$

$$f(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$\textcircled{3} a) f(x) = A \begin{bmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+1=2 \\ -2x=-2 \\ -x=-1 \\ 2x+1=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$\text{d'où } f(1) = A$$

dans $f(3x+y+x+y)$

on remplace y
par 1
et on obtient

$$b) A \cdot f(x) = f(1) \cdot f(x) = f(3x+1+x+y) = f(4x+1)$$

$$c) A^n = f(x_n) \text{ avec } x_n = 4x_{n-1} + 1 \text{ et } x_0 = 0$$

Démonstration par récurrence

$$\text{pour } n=1 : A^1 = f(x_1) \text{ or } x_1 = 4x_0 + 1$$

$$\text{or } x_0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

$$\Rightarrow A^1 = f(1) \text{ vérifie}$$

• supposons que $A^{n-1} = f(x_{n-1})$ est vraie

• Démontrons que $A^n = f(x_n)$

$$\text{or } A^n = A^{n-1} \cdot A = A \cdot A^{n-1}$$

$$= f(x_{n-1}) A = f(4x_{n-1} + 1) = f(x_n)$$

$$\text{d'où } x_n = 4x_{n-1} + 1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; A^n = f(x_n) \text{ avec } x_n = 4x_{n-1} + 1$$

$$\textcircled{4} y_n = x_n + \frac{1}{3}$$

$$y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{3} = 4x_n + 1 + \frac{1}{3} = 4x_n + \frac{4}{3}$$

$$= 4 \left(x_n + \frac{1}{3} \right) = 4y_n$$

d'où y_n est une S.G de raison $q=4$ et du premier terme

$$y_0 = x_0 + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\rightarrow y_n = y_0 \cdot q^n = \boxed{\frac{1}{3} \cdot 4^n}$$

$$\text{or } y_n = x_n + \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_n = y_n - \frac{1}{3}$$

dans la matrice $F(x)$

$$x_n = \frac{1}{3} 4^n - \frac{1}{3}$$

on remplace

$$x \text{ par } \frac{1}{3} 4^n - \frac{1}{3} \text{ donc } A^n = F\left(\frac{1}{3} 4^n - \frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} 4^n + \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} 4^n + \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} 4^n + \frac{2}{3} & \frac{2}{3} 4^n + \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 3B$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = 3B \cdot B = 3B^2 = 3^2 B$$

$$\boxed{B^n = 3^{n-1} B} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dem. par récurrence

pour $n=1$ $B^1 = 3^0 \cdot B$ vérifie

Supp que $B^n = 3^{n-1} \cdot B$ est vérifié

Dem que $B^{n+1} = 3^n \cdot B$

$$\begin{aligned} \text{or } B^{n+1} &= B^n \cdot B = 3^{n-1} \cdot B \cdot B = 3^{n-1} \cdot B^2 \\ &= 3^{n-1} \cdot 3 \cdot B \\ &= 3^n \cdot B \end{aligned}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \boxed{B^n = 3^{n-1} \cdot B}$

$$\begin{aligned} b/f(x) &= \begin{bmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -x \\ -2x & 2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= x \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{F(x) = xB + I_2}$$

$$\boxed{A = F(1) = B + I_2}$$

$$A^n = (B+I)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k B^k I^{n-k} = C_n^0 I^n + \sum_{k=1}^n C_n^k B^k$$

$\omega K=0 \notin \mathbb{N}^*$

$$= I + \left(\sum_{k=1}^n C_n^k 3^{k-1} \right) B$$

$K=0$ on $n \in \mathbb{N}^*$

on doit passer en fonction de k et pas $k-1$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$= I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n C_n^k 3^k \right) B$$

$$= I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k 3^k - C_n^0 3^0 \right) B$$

$$= I + \frac{1}{3} [4^n - 1] B$$

$$= I + \left(\frac{1}{3} 4^n - \frac{1}{3} \right) B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3} 4^n - \frac{1}{3} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} 4^n + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} 4^n + \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} 4^n + \frac{2}{3} & \frac{2}{3} 4^n + \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} 4^n & -\frac{1}{3} 4^n \\ \frac{2}{3} 4^n & \frac{2}{3} 4^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= 4^n \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= 4^n P + Q$$

exercice 5

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} A^2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ -6 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \alpha A + \beta I$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\alpha & -\frac{3}{4}\alpha & \frac{3}{4}\alpha \\ -\frac{3}{4}\alpha & \frac{1}{4}\alpha & \frac{3}{4}\alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\alpha + \beta & -\frac{3}{4}\alpha & \frac{3}{4}\alpha \\ -\frac{3}{4}\alpha & \frac{1}{4}\alpha + \beta & \frac{3}{4}\alpha \\ 0 & 0 & \alpha + \beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4}\alpha + \beta = \frac{10}{16} \\ -\frac{3}{4}\alpha = -\frac{6}{16} \\ \alpha + \beta = 1 + \frac{16}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A^2 = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} I$$

$$\textcircled{2} \text{ On a. } A^2 = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} I$$

$$2A^2 = A + I$$

$$2A^2 - A = I$$

$$A(2A - I) = (2A - I)A = I$$

$$\text{donc } A \text{ est inversible} / A^{-1} = 2A - I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{opérations}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$③ \quad X^n = \left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) Q(x) + ax + b$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

pour $x=1$

$$1 = a + b$$

pour $x = -\frac{1}{2}$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}a + b$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -\frac{1}{2}a + b = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

$$\text{①} \quad \text{②}$$

$$\text{①} \quad \text{②} \Rightarrow \frac{3}{2}a = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{①} \Rightarrow b = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{d'où } X^n = \left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) Q(x) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)x + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

④ on pose $X=A$

$$\Rightarrow A^n = \left(A^2 - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) Q(A) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)A + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)I$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)I$$

$$\Rightarrow A^n = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)A + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)I$$

exercice 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{① a/ } A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A^2 = 0$$

b/ alors A est nilpotente d'ordre 3.

$$\text{c/ } \forall n \geq 3; A^n = 0$$

$$b) M(x) = I + xA + \frac{1}{2}x^2 A^2$$

$$a) M(x) M(y) = (I + xA + \frac{1}{2}x^2 A^2) (I + yA + \frac{1}{2}y^2 A^2)$$

$$= I + yA + \frac{1}{2}y^2 A^2 + xA + xyA^2 + \frac{1}{2}x^2 A^2$$

$$= I + (x+y)A + (\frac{1}{2}y^2 + xy + \frac{1}{2}x^2) A^2$$

$$= I + (x+y)A + \frac{1}{2}(x+y)^2 A^2 = M(x+y)$$

$$b) M(x) \cdot M(-x) = M(x-x) = M(0) = I$$

$$M(x) M(-x) = M(-x) M(x) = I$$

donc M est inversible / $M^{-1}(x) = M(-x)$

c)

$$M^{-1}(x) = I - xA + \frac{1}{2}x^2 A^2$$

$$M^{-1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}x^2 \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-x-x^2 & -x+x^2 & -x-x^2 \\ x & 1-x & x \\ 2x+x^2 & -x^2 & 1+2x+x^2 \end{bmatrix}$$

$$(3) M(x) \cdot M(y) = M(x+y)$$

$$M^2(x) = M(2x)$$

$$M^3(x) = M^2(x) \cdot M(x) = M(2x) \cdot M(x) = M(3x)$$

$$M^n(x) = M(nx) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dem par récurrence

pour $n=0$ $M^0(x) = M(0) = I$ vérifie

supp $M^n(x) = M(nx)$ est vraie

dem $M^{n+1}(x) \stackrel{?}{=} M((n+1)x)$

or $M^{n+1}(x) = M^n(x) \cdot M(x) = M(nx) \cdot M(x)$

$$= M(nx+x) = M((n+1)x)$$

donc $\forall x \in \mathbb{N}, M^n(x) = M(nx) = I + nx + \frac{1}{2}(nx)^2 A^2$

Exercice 6

$$M = \begin{bmatrix} -1 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$N = M + I = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{1} N^2 = N \cdot N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{bmatrix}$$

$$N^3 = N^2 \cdot N = N \cdot N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

alors N est nilpotente d'ordre 3 ; $\forall n \geq 3, N^n = 0$

$$\textcircled{2} N = M + I \Rightarrow M = N - I$$

$$M^n = (N - I)^n = (N + (-I))^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot N^k \cdot (-I)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k (-I)^{n-k} N^k = C_n^0 (-I)^n + C_n^1 N (-I)^{n-1} + C_n^2 N^2 (-I)^{n-2} + \underbrace{C_n^3 N^3 (-I)^{n-3}}_{=0} + \dots$$

$$= (-I)^n + n N (-I)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} N^2 (-I)^{n-2}$$

$$= (-1)^n I^n + n N (-1)^{n-1} I^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} N^2 (-1)^{n-2} I^{n-2}$$

$$= (-1)^n I + n (-1)^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} (-1)^{n-2} N^2$$

$$\textcircled{3} \text{ on a } N^3 = 0$$

$$N^3 - I^3 = I^3$$

$$\Rightarrow (N - I)(N^2 + NI + I^2) = I^3$$

$$= (N^2 + NI + I^2)(N - I) = -I$$

$$\Rightarrow M(N^2 + NI + I) = (N^2 + NI + I)M = -I$$

$$M(N^2 - N - I) = (-N^2 - N - I)M = I$$

donc M est inversible / $M^{-1} = -N^2 - N - I$

$$M^{-1} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -a & -a \\ -1 & -a & -1-a \\ 1 & a & a-1 \end{bmatrix}$$

exercice 7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1) B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow B \text{ est nilpotente d'ordre } 3$$

$$A^n = (B + I)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k B^k I^{n-k} \quad \forall n \geq 3; B^n = 0$$

$$= C_n^0 I^n + C_n^1 B I^{n-1} + C_n^2 B^2 I^{n-2} + \underbrace{C_n^3 B^3 I^{n-3} + \dots}_{=0}$$

$$= I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(2) \begin{cases} U_{n+1} = U_n + 2V_n \\ V_{n+1} = V_n + 2W_n \\ W_{n+1} = W_n \end{cases} ; n \in \mathbb{N} ; \begin{cases} U_0 = 0 \\ V_0 = 1 \\ W_0 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{X_n}$

$$X_{n+1} = A X_n$$

$$X_n = A^n X_0$$

avec

$$X_0 = \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n + 4n(n-1) \\ 1 + 4n \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} U_n = 4n^2 - 2n \\ V_n = 1 + 4n \\ W_n = 2 \end{cases}$$

$$(3) T = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad M = T + I$$

$$a) T^2 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + ab + ac & a^2 + ab + ac & a^2 + ab + ac \\ ab + b^2 + bc & ab + b^2 + bc & ab + b^2 + bc \\ ac + bc + c^2 & ac + bc + c^2 & ac + bc + c^2 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = \begin{bmatrix} a(a+b+c) & a(a+b+c) & a(a+b+c) \\ b(a+b+c) & b(a+b+c) & b(a+b+c) \\ c(a+b+c) & c(a+b+c) & c(a+b+c) \end{bmatrix}$$

$$T^2 = (a+b+c) \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} = \underbrace{(a+b+c)}_S T$$

$$T^2 = S T$$

$$b) T^3 = T^2 T = T T^2$$

$$= S T T = S T^2 = S S T = \boxed{S^2 T}$$

$$T^n = S^{n-1} T \quad \forall n \geq 1$$

Demonstration par récurrence

pour $n=1$: $T^1 = S^0 \cdot T$: Vrai ~~ssi~~ $S \neq 0$; $a+b \neq 0$

Supposons que : $T^n = S^{n-1} \cdot T$ est vérifiée

Démontrons que $T^{n+1} = S^n \cdot T$

$$\text{or } T^{n+1} = T^n \cdot T = \dots = T^n = S^{n-1} \cdot T \cdot T = S^{n-1} \cdot T^2 = S^{n-1} \cdot S \cdot T$$

$$\boxed{T^{n+1} = S^n \cdot T}$$

d'où : $\forall n \geq 1$ on a $T^n = S^{n-1} \cdot T$

$$\begin{aligned} \text{ii) } M^2 &= (T + I)^2 = T^2 + I^2 + 2TI \\ &= T^2 + 2T + I \\ &= ST + 2T + I \\ &= (S+2)T + I \\ &= (S+2)(M-I) + I \\ &= (S+2)M - (S+2)I + I \\ M^2 &= (S+2)M - (S+1)I \end{aligned}$$

$$\text{iii) } (S+1)I = (S+2)M - M^2$$

il faut que $S+1$ soit $\neq 0 \Leftrightarrow \boxed{S \neq -1}$

$$\begin{aligned} I &= \frac{S+2}{S+1} M - \frac{1}{S+1} M^2 \\ &= M \left(\frac{S+2}{S+1} I - \frac{1}{S+1} M \right) \\ &= \left(\frac{S+2}{S+1} I - \frac{1}{S+1} M \right) M \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M \text{ est inversible } M^{-1} = \frac{S+2}{S+1} I - \frac{1}{S+1} M$$

$$\text{iii) } M^n = (T+I)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k T^k I^{n-k}$$

$$= C_n^0 I^n + \sum_{k=1}^n C_n^k T^k$$

$$= I + \left(\sum_{k=1}^n C_n^k S^{k-1} \right) T$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$= I + \frac{1}{S} \left(\sum_{k=1}^n C_n^k \cdot S^k \right) T$$

$$= I + \frac{1}{S} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k \cdot S^k - C_n^0 S^0 \right) T$$

$$= \boxed{I + \frac{1}{S} [(S+1)^n - 1] \cdot T}$$

d/ $S=0 \Rightarrow a+b+c=0$

- i) Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}
 ii) En déduire la résolution du système

Suivant :

$$\begin{cases} a x + (a+1) y + a z = 1 \\ b x + (b+1) y + b z = 2 \\ c x + c y + (c+1) z = 3 \end{cases}$$

iii) Calculer M^{-1}

i) $M^2 = (S+2)M - (S+1)I = 2M - I$

$$I = 2M - M^2$$

$$I = M(2I - M) = (2I - M)M$$

M est inversible : $M^{-1} = 2I - M$

$$M^{-1} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+1 & a & a \\ b & b+1 & b \\ c & c & c+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-a & -a & -a \\ -b & 1-b & -b \\ -c & -c & 1-c \end{bmatrix}$$

ii)

S :

$$\begin{cases} (a+1)x + ay + az = 1 \\ bx + (b+1)y + bz = 2 \\ cx + cy + (1+c)z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a+1 & a & a \\ b & b+1 & b \\ c & c & c+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$M \quad X \quad B$

$$S \Rightarrow M \cdot X = B$$

$$\Rightarrow \underbrace{M^{-1} M}_I X = M^{-1} B$$

$$\Rightarrow \boxed{X = M^{-1} B}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a & -a & -a \\ -b & 1-b & -b \\ -c & -c & 1-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a-2a-3a \\ -b+2-2b-3b \\ -c-2c+3-3c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-6a \\ 2-6b \\ 3-6c \end{bmatrix}$$

$$S_{R^3} = \{(1-6a, 2-6b, 3-6c) : a, b, c \in R\}$$

$$iii) M^n = (T + I)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k T^k I^{n-k}$$

$$= C_n^0 I^n + C_n^1 T I^{n-1} + C_n^2 T^2 I^{n-2} + \dots$$

or Test nilpotente checked

$$\forall n \geq 2; T^n = 0$$

$$\Rightarrow I + nT$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} na+1 & na & na \\ nb & nb+1 & nb \\ nc & nc & nc+1 \end{bmatrix}$$