

Exercice 1 :

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2a & 2b & b-c \\ 2b & 2a & a+c \\ a+b & a+b & b \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a+c & b & b-c \\ c & a+c & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x+1 & -2 & 2 & -2 \\ a & x-a-1 & a & -a \\ -2 & 2 & x-3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & x \end{vmatrix} \quad \text{puis déterminer } x \text{ pour que } \Delta_3 = 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Exercice n°2 :

Soient a, b, c et d quatre entiers relatifs. On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad A = (a, b, c, d)$$

- 1) Calculer $A^t A$. En déduire une expression factorisée du déterminant de A
- 2) Calculer $A(a, b, c, d) \cdot A(a', b', c', d')$. En déduire que le produit de deux entiers qui sont somme de quatre carrés est encore somme de quatre carrés.

Exercice 3 :

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$ on donne les vecteurs

$$U = (1, 1, 1, 1) \quad V = (1, 1+a, 1, 1) \quad W = (1, 1, 1+b, 1) \quad \text{et} \quad Z = (1, 1, 1, 1+c)$$

- 1) Pour quelles valeurs de a, b et c la famille (U, V, W, Z) est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
- 2) On donne le système

$$(S) \begin{cases} x+y+z+t = m \\ x+(1+a)y+z+t = n \\ x+y+(1+b)z+t = p \\ x+y+z+(1+c)t = q \end{cases}$$

- a) Résoudre (S) dans le cas où il est de Cramer
- b) Déduire l'inverse de la matrice A associée au système (S)

Exercice 4 :

On donne les systèmes

$$(S_1) \begin{cases} 2x - y + 3z = a \\ 3x + y - 5z = b \\ -5x - 5y + 21z = c \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x - y + z + 2t = 1 \\ -x + 2y - z + t = 2 \\ 2x + y + z + t = 3 \\ 2x + 2y + 3z + 4t = a \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m^2 \\ x + y + z + mt = m^3 \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R} \text{ et } m \in \mathbb{R}$$

- 1) a) Déterminer le rang de (S_1) et le résoudre suivant a, b et c .
b) Déterminer le rang de (S_2) puis le rendre suivant a .
- 2) Résoudre suivant m le système (S_3) .

Exercices 5 :

Soit le système $(S) \begin{cases} (m-5)x + 2y + 3z = a \\ x + 2y + (m-3)z = b \\ x + (m-4)y + 3z = c \end{cases} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$

Soit $A = \begin{pmatrix} m-5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & m-3 \\ 1 & m-4 & 3 \end{pmatrix}$

- 1°/ Déterminer les valeurs de m pour lesquelles A est inversible
- 2°/ Dans le cas où A est inversible vérifier que :

$$A^{-1} = \frac{-1}{m(m-6)} \begin{pmatrix} 1-m & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2-m \\ 1 & 3-m & 2 \end{pmatrix}$$

- 3°/ Déterminer suivant m le rang de A . *la matrice.*
- 4°/ Résoudre le système dans le cas où il est de Cramer.
- 5°/ Résoudre le système dans le cas où il n'est pas de Cramer (on discutera suivant a, b et c).

Seite 3

Übung 1

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2a & 2b & b-c \\ 2b & 2a & a+c \\ a+b & a+b & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a-b) & 2b & b-c \\ 2(b-a) & 2a & a+c \\ 0 & a+b & b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b) \begin{vmatrix} 2 & 2b & b-c \\ -2 & 2a & a+c \\ 0 & a+b & b \end{vmatrix} = (a-b) \begin{vmatrix} 2 & 2b & b-c \\ 0 & 2(a+b) & a+b \\ 0 & a+b & b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a+b) \begin{vmatrix} 2 & 2b & b-c \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & a+b & b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a+b) 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a+b & b \end{vmatrix} = 2(a-b)(a+b)(b-a)$$

$$= -2(a-b)^2(a+b)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+c & b & a-c \\ c & a+c & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b-c \\ 0 & a+c & a \\ 2b & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} a+c & a \\ a & a+b \end{vmatrix} + 2b \begin{vmatrix} b & b-c \\ a+c & a \end{vmatrix}$$

$$= a[a+c](a+b) - a^2 + 2b[ba - (a+c)(b-c)]$$

$$= a[ab+ac+bc] + 2b[ac - bc + c^2]$$

$$= a^2b + a^2c + 3abc - 2b^2c + 2b^2c$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x+1 & -2 & a & -a \\ a & x-a-1 & x-3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & x \\ -1 & 1 & x & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 & -2 \\ x-1 & x-a-1 & 0 & -a \\ 0 & 2 & x-1 & 2 \\ 0 & 1 & x-1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & x-a-1 & 0 & -a \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & x-a-1 & 0 & 2-a \\ 0 & 1 & 0 & 2-x \\ 0 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2 \begin{vmatrix} x-a+1 & -2 & 0 & 2-a \\ 1 & 0 & 0 & 2-x \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= -(x-1)^2 \begin{vmatrix} x-a+1 & 2-a \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = -(x-1)^2 \begin{vmatrix} x-a & x-a \\ 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= -(x-1)^2 (x-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= -(x-1)^2 (x-a) (1-x) = (x-1)^3 (x-a)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a-b-c & 2a & 0 \\ b+c+a & b-c-a & b+c+a \\ 0 & 2c & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 2a \\ 1 & b-c-a \\ 0 & 2c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & b-c-a & 2a \\ 0 & 2c & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(a+b+c) \begin{vmatrix} b-c+a & 1 \\ 2c & -1 \end{vmatrix} = -(a+b+c) \begin{vmatrix} b-c+a & 1 \\ b+c+a & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c)$$

exercice 2

$$\textcircled{1} A^t A = D = \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A^t A = \det D = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

$$\det A \cdot \det A^t = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

$$(\det A)^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

$$\text{d'où } \det A = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

exercice 3

$$① \det(u, v, w, z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 - c_1 & c_3 - c_1 & c_4 - c_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc \neq 0$$

pour $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ (u, v, w, z) est une f.l.
et par suite (u, v, w, z) est une base de $\mathbb{R}^4$

$$② \begin{cases} x + y + z + t = m \\ x + (1+a)y + z + t = n \\ x + y + (1+b)z + t = p \\ x + y + z + (1+c)t = q \end{cases} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

or $\det A = abc \neq 0 \Rightarrow S$ est de Cramer il admet
une unique solution tel que $x = \frac{\det A_1}{\det A}$

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ n & 1+a & 1 & 1 \\ p & 1 & 1+b & 1 \\ q & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)m - \frac{1}{a}n - \frac{1}{b}p - \frac{1}{c}q$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 & 1 \\ 1 & p & 1+b & 1 \\ 1 & q & 1 & 1+c \end{vmatrix} = -\frac{1}{a}m + \frac{1}{a}n$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & 1+a & m & 1 \\ 1 & 1 & n & 1 \\ 1 & 1 & p & 1+b \\ 1 & 1 & q & 1+c \end{vmatrix} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b}p$$

$$t = \frac{\det A_4}{\det A} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & 1+a & 1 & m \\ 1 & 1 & 1+b & n \\ 1 & 1 & 1 & p \\ 1 & 1 & 1 & q \end{vmatrix} = -\frac{1}{c}m + \frac{1}{c}q$$

$$S_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)m - \frac{1}{a}n - \frac{1}{b}p - \frac{1}{c}q, -\frac{1}{a}m + \frac{1}{a}n, \frac{1}{b} + \frac{1}{b}p, -\frac{1}{c}m + \frac{1}{c}q \right) \right\}$$

$$c) (S) \Rightarrow Ax = B \Rightarrow X = A^{-1} B$$

$$\text{or } \begin{cases} x = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1\right)m - \frac{1}{a}n - \frac{1}{b}p - \frac{1}{c}q \\ y = -\frac{1}{a}m + \frac{1}{a}n \\ z = -\frac{1}{b}m + \frac{1}{b}p \\ t = -\frac{1}{c}m + \frac{1}{c}q \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{bmatrix}$$

~~exercice~~ (suite cours)

3-3

$n > p$

exemple

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -x + 4y = 6 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rang}(A) \leq \inf(3, 2) = 2$$

$$\det(L_1; L_2) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 2$$

alors il y a 2 équations principales ① et ②
et une équation secondaire ③ (de vérification)

$$S \Rightarrow (S') \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -x + 4y = -1 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

or $\det A^{-1} = 5 \neq 0 \Rightarrow (S')$ est de Cramer il admet une unique solution

$$x = \frac{\det A'_1}{\det A} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{3}{5}$$

$$y = \frac{\det A'_2}{\det A} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{5}$$

$$S_{R^2}' = \left\{ \left(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5} \right) \right\}$$

$$\textcircled{3} x - y = 6 \text{ impossible car } -\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = -\frac{1}{5} \neq 6$$

S est incompatible $S_{P^2} = \emptyset$

exercice 4.

$$S_1 = \begin{cases} 2x - y + 3z = a \\ 3x + y - 5z = b \\ -5x - 5y + 21z = c \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ -5 & -5 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rang}(A) \leq \inf(3, 3) = 3$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ -5 & -5 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ -5 & -5 & 21 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 + L_2 \\ L_2 + 5L_1 \\ L_3 - 5L_1}} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 - 3L_1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \div 4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3.5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & -3.5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \div 2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -0.25 \\ 0 & 1 & -3.5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \div (-4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -0.25 \\ 0 & 1 & -3.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 + 0.25L_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 + 3.5L_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{Rang}(A) = 3$$

$$\det A' = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(A') = 2$$

* il y a 2 variables principales : x y et une variable secondaire z

* il y a 2 équations principales ① et ② et une équation de vérification secondaire ③ (de vérification)

$$(S) \Rightarrow (S') : \begin{cases} 2x - y = a - 3z \\ 3x + y = b + 5z \end{cases} \rightarrow A'$$

$$\text{or } \det A' = 5 \neq 0 \Rightarrow S' \text{ est de Cramer}$$

$$x = \frac{\det A'_1}{\det A'} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} a-3z & -1 \\ b+5z & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} (a-3z+b+5z) = \frac{1}{5} (a+b+2z)$$

$$y = \frac{\det A'_2}{\det A'} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & a-3z \\ 3 & b+5z \end{vmatrix} = \frac{1}{5} (2b+10z-3a+9z) = \frac{1}{5} (2b-3a+19z)$$

$$S'_{P^2} = \left\{ \left(\frac{1}{5} (a+b+2z), \frac{1}{5} (2b-3a+19z), z \right) \right\}$$

$$\textcircled{3} : -a - b - 2z - 2b + 3a - 19z + 21z = c$$

$$2a - 3b = c$$

$$\text{Si } 2a - 3b = c \Rightarrow S_R^3 = \left\{ \frac{1}{5}(a+b+2c), \frac{1}{5}(2b-3a+19c), \frac{1}{5}(3a-2b+c) \right\}$$

$$\text{Si } 2a - 3b \neq c \Rightarrow S \text{ est incompatible } S_R^3 = \emptyset$$

$$(S_3): \begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m^2 \\ x + y + z + mt = m^3 \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+3 & 1 & 1 & 1 \\ m+3 & m & 1 & 1 \\ m+3 & 1 & m & 1 \\ m+3 & 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$

$$(m+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$= (m+3)(m-1)^3$$

1^{er} cas: Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\} \Rightarrow \det A \neq 0$

$\Rightarrow (S)$ est de Cramer

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{1}{(m+3)(m-1)^3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & m & 1 \\ m^3 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \dots$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{1}{(m+3)(m-1)^3} = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & m^2 & m & 1 \\ 1 & m^3 & 1 & m \end{vmatrix} = \dots$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{1}{(m+3)(m-1)^3} = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m^2 & m \end{vmatrix} = \dots$$

$$t = \frac{\det A_4}{\det A} = \frac{1}{(m+3)(m-1)^3} = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \dots$$

$$S_R^4 = \{ \dots \}$$

2^{ème} cas : si $m=1 \rightarrow \det A=0$

donc (S) n'est pas de Cramer.

$\Rightarrow$ admet une infinité de solution ou bien aucune solution

$$(S_3) = \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+y+z+t=1 \\ x+y+z+t=0 \\ x+y+z+t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+y+z+t=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=1-y-z-t}$$

$$S_R^4 = \{(1-y-z-t, y, z, t) \mid y, z, t \in \mathbb{R}\}$$

3^{ème} cas : si $m=-3 \Rightarrow \det A=0$

alors (S) n'est pas de Cramer.

$$(S_3) = \begin{cases} -3x+y+z+t=1 & (1) \\ x-3y+z+t=-3 & (2) \\ x+y-3z+t=9 & (3) \\ x-y+z-3t=-27 & (4) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow -4x + 4y = 4 \Rightarrow \boxed{y = 1+x}$$

$$(1) - (3) \Rightarrow -4x + 4z = -8 \Rightarrow \boxed{z = -2+x}$$

$$(1) - (4) \Rightarrow -4x + 4t = 28 \Rightarrow \boxed{t = 7+x}$$

$$(1) -3x + 1+x -2+x + 7+x = 1 \\ 6=1 \text{ impossible}$$

$$S_R^4 = \emptyset$$

Exercice 5

$$S : \begin{cases} (m-5)x + 2y + 3z = a \\ x + 2y + (m-3)z = b \\ x + (m-4)y + 3z = c \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} m-5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & m-3 \\ 1 & m-4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{1} \det A = \begin{vmatrix} m-5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & m-3 \\ 1 & m-4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-5 & 2 & 3 \\ 6-m & 0 & m-6 \\ 6-m & m-6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (m-6)^2 \begin{vmatrix} m-5 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (m-6)^2 \begin{vmatrix} m-2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (m-6)^2 \begin{vmatrix} m-2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -m(m-6)$$

A est inversible pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$

$$\textcircled{2} A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

$$\textcircled{3} \text{Rang}(A) \leq \inf(3, 3) = 3$$

Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 6\} \Rightarrow \det A \neq 0$ donc $\text{Rang } A = 3$

Si $m = 0 \Rightarrow \det A = 0$

$\Rightarrow \text{Rang } A \leq 2$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

$\text{Rang}(A) = 2$

Si $m = 6 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow \text{Rang } A \leq 2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(A) = 1$$

on peut remarquer que les 3 vecteurs colonnes sont colinéaires ou bien les 3 vecteurs-lignes sont égaux alors le rang de $A = 1$

$\textcircled{4}$ Set de Cramer si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-1}{m(m-6)^2} \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ b & 2 & m-3 \\ c & m-4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-1}{m(m-6)^2} \begin{vmatrix} m-5 & 3 & 3 \\ 1 & m-3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$B = \frac{\det A_3}{\det A} = -\frac{1}{m(m-6)^2} \left| \begin{array}{ccc|c} m-5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m-4 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

⑤ si $m = 0$ ou $m = 6$

$$\Rightarrow \det A = 0$$

donc (S) n'est pas de Cramer il admet une infinité de sol ou bien aucune solution