EQUIPE PEDAGOGIQUE: *Mzali -Sayadi -chaib-Labidi - Jbenyani-Tnani -Melki, Hajlaoui*

Cahier de TD (Statistique descriptive et probabilité)
LFG-LAC

I. Partie statistique descriptive:

Exercice 1:

Déterminer la nature des variables statistiques suivante(qualitative, quantitative discrète, quantitative continue).

1-Etat civil des habitants de la Tunisie.
2-La profession des parents.
3-Le chiffre d'affaire d'une entreprise en Dinars.
4-La couleur des yeux des étudiants d'une certaine faculté.
5-La qualité d'un produit.
6-La marque d'une voiture.
7-Le nombre de jour de pluie pendant le mois de Mars.
8-Les dépenses annuel par ménage.

Exercice 2:

Le responsable d'une entreprise a enregistré pendant 30 jours d'activité, le nombre d'ouvriers absents. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant :

3	**6**	**4**	**6**	**3**	**9**	**4**	**4**	**5**	**6**
1	**2**	**4**	**3**	**8**	**5**	**6**	**7**	**8**	**2**
3	**5**	**6**	**7**	**4**	**3**	**4**	**5**	**4**	**0**

1/ Quelle est la variable étudiée ? Préciser sa nature et ses différentes modalités.

2/ Déterminer la fréquence correspondant à chaque valeur de la variable discrète et établir la distribution des effectifs. Déterminer la fréquence cumulée croissante.

3/ Représenter le diagramme différentiel et le diagramme intégral de cette série.

Exercice 3:

On vous donne la répartition de 100 familles dans une certaine région selon le nombre de leurs enfants scolarisés

Nombres d'enfants scolarisés	Effectifs
2	**10**
3	**15**
4	**25**
5	**30**
6	**20**

1- Préciser la population étudiée, la nature du caractère étudié ainsi que ses modalités

2-Représenter graphiquement la distribution statistique.

3-Calculer les fréquences relatives, les fréquences cumulées croissantes et décroissante.

4-Quel est le nombre de famille ayant au moins 4 enfants scolarisés? Moins de 4 enfants?

5-Quel est le nombre de famille ayant au plus 4 enfant scolarisé? Plus de 4 enfants?

6-Représenter graphiquement la fonction de répartition.

Exercice 4

Le service technique d'une entreprise industrielle a étudié un parc de 150 machines fabriquées selon le nombre d'interventions pour réparation ayant eu lieu durant leur cinq années d'utilisation. Ils ont obtenu la distribution suivante :

Nombre d'interventions	Nombre de machines	Nombre d'interventions	Nombre de machines
0 à 10	5	51 à 60	33
11 à 20	9	61 à 70	21
21 à 30	17	71 à 80	11
31 à 40	23	81 à 90	2
41 à 50	28	91 à 100	1

1/ Déterminer la médiane de la distribution donnée par la méthode graphique et par le calcul. On traitera la variable statistique de type continu.

2/ Calculer la moyenne arithmétique de cette distribution. Que représente-t-elle ?

3/ Déterminer la classe modale. Calculer le mode.

4/ Comparer les résultats obtenus et commenter.

Exercice 5

Le tableau suivant donne la répartition d'un échantillon de 1200 ménagères, suivant les dépenses mensuelles effectuées auprès d'une grande surface :

Dépenses en Dinars	Effectifs
Moins de 5	8
De 5 à 15	40
De 15 à 25	208
De 25 à 35	316
De 35 à 45	244
De 45 à 75	168
De 75 à 105	126
De 105 à 155	90
TOTAL	1200

1/ Tracer l'histogramme

2/ Calculer la médiane et la médiale

3/ Calculer la dépense moyenne

4/ Déterminer la dépense modale

5/ Parmi ces trois paramètres de position, lequel utilise-t-on pour .

- déterminer approximativement l'enveloppe des dépenses totales

- connaître la valeur des dépenses la plus fréquente

- avoir une chance sur deux que les dépenses d'une ménagère prise au hasard ne dépasse pas la valeur typique ?

Exercice 6:

Le tableau suivant illustre la distribution des fréquence de 650 exploitations agricoles selon leurs superficies en hectares:

Classes des superficies	fi
[0,a[	0,17
[a,10[	b
[10,15[	0,14
[15,20[	0,2
[20,30[	0,0
[30,40[	0,09
[40,50[	0,08
[50,100[	0,06
[100,200[	d

1- Calculer b et d sachant que la classe médiane est [10,15[et que Me=13,57 hectares.

2-pour $\overline{X} = 23{,}15$, calculer a et donner la représentation graphique appropriée à cette distribution.

3- Calculer et interpréter le mode de cette distribution.

4-Calculer et interpréter le premier et le troisième quartile ainsi que le premier et le neuvième décile, déduire l'étendue interquartile (l'écart interquartile) et l'étendue interdécile (l'écart interdécile) de cette distribution.

5-Calculer et interpréter la valeur médiale.

6-Déterminer et interpréter la courbe de concentration et l'indice de Gini de cette distribution.

II. Partie Introduction au calcul des probabilités:

Exercice 1 :

Le lendemain d'un match de football, 3 journaux j_1, j_2, j_3 publient leurs critiques :

- A : événement « la critique de j_1 est favorable »
- B : événement « la critique de j_2 est favorable »
- C : événement « la critique de j_3 est favorable »

On suppose qu'une critique ne peut être que favorable ou défavorable à l'aide de j_1, j_2, j_3.

Écrire les événements suivants :

- E1 : seule la critique de $j_1$est favorable.
- E2 : j_1 et j_2, sont favorables mais pas j_3.
- E3 : deux critiques au moins sont favorables.
- E4 : deux critiques sont favorables.

Exercice 2 :

Soient les 3 événements suivants A, B, et C telles que p(A) = 0.2, p(B) = 0.4 et p(C) = 0.3. Donner une valeur exacte des probabilités suivantes :

$P(\overline{B}), P(B\cup C), P(\overline{A}\cup\overline{B}), P(A\cap C), P(\overline{A}\cap\overline{C}), P(\overline{A}\cap B)$ et $P(A\cup B\cup C)$

Exercice 3 :

Soient A, B et C trois événements.

1- Exprimer les événements suivants :
   a- A, B et C se réalisent.
   b- A ou B ou C se réalise.
   c- Exactement un des trois se réalise.
2- Si les trois événements sont indépendants et p(A) = 1/5, p(B) = 1/4 et p(C) = 1/3, déterminer p(a), p(b) et p(c).

Exercice 4 :

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. On choisit au hasard et sans remise 2 boules une après l'autre.

Soit A: l'événement « la première boule tirée est blanche » et B: l'événement « au moins une boule tirée est blanche ».

Calculer : $P(A\cap B), P(A\cap\overline{B}), P(\overline{A}\cap B), P(\overline{A}\cap\overline{B}), P(A/B), P(A/\overline{B}), P(B/A)$, et $P(B/\overline{A})$

Exercice 5 :

1- Combien y a-t-il de façons d'asseoir 5 hommes et 4 femmes sur un banc qui ne comporte que 4 places ?
2- S'il y a 9 places et il faut asseoir ces 9 personnes en lignes de manière à ce que les femmes occupent les places paires. Combien y a-t-il de possibilités de le faire ?
3- Combien peut-on former de comités de 5 personnes parmi ce groupe de 9 ?
4- On doit former un groupe comprenant 2 femmes et 3 hommes. Quel est le nombre de possibilités si :
   a- le comité peut comprendre n'importe lequel des femmes et des hommes ?
   b- un homme particulier doit être membre du comité ?
   c- deux femmes particulières doivent être exclues du comité ?

Exercice 6:

On lance deux dés (un rouge et un vert). Soient les trois événements A, B, et C définis par :

A : événement le dé rouge donne 1 ou 2.

B : événement le dé vert donne 3, 4 ou 5.

C : événement la somme des deux dés est égale à 4, 11 ou 12.

1- Vérifier que $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$
2- Peut-on conclure à partir de la question précédente que ces trois événements sont indépendants ? Justifier votre réponse ?

Exercice 7:

On considère l'espace fondamental $\Omega = \{1,2,3\}$ et soit les événements singuliers $A = \{1\}$, $B=\{2\}$ et $C=\{3\}$ avec $P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$.

Calculer alors $P(A \cup B), P(C), P(\overline{A} \cap \overline{B}), P(\overline{A} \cup \overline{B}), P(A/B), P(B \cup C)$

Exercice 8:

Parmi les 10 patients d'une clinique, 4 ont une maladie contagieuse. Le médecin appelle au hasard et à tour de rôle un échantillon de 3 patients ; trouver la probabilité que :

1- Les trois patients appelés ont tous la maladie
2- Au moins un ayant cette maladie.

Exercice 9:

Soit l'expérience aléatoire qui consiste a tiré 3 cartes sans remis à partir d'un jeu de 52 cartes. Calculer les probabilités suivantes :

- A est l'évènement : obtenir 2 valets et 1 roi.
- B est l'évènement : obtenir 3 cartes de la même couleur.
- C est l'évènement : obtenir au moins 1 as

Exercice 10:

On considère 5 familles de 4 personnes chacune. On sait que 6 des 20 personnes ont une maladie contagieuse. Quelle est la probabilité que :

- 2 familles exactement soient mises en quarantaine.
- 3 familles exactement soient mises en quarantaine.
- Au moins une famille est mise en quarantaine.
- Toutes les familles.

Une famille est mise en quarantaine dès que l'un de ses membres au moins est malade.

III. Partie 3: les variables aléatoires discrètes et continues

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition :

$$F(x)\begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1/3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 2/3 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

1- Déterminer le mode, la médiane et l'espérance mathématique de X ?

2- Calculer $P(1{,}5 \leq X < 3), P(X = 3), P(1 \leq X \leq 4)$ et $P(X \geq 3)$

Exercice 2 : (Mai 2011)

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1- Vérifier que f(x) est une densité de probabilité de la variable aléatoire X.

2- Calculer $P(0 \leq X \leq 1)$ et $P(X \leq 2)$.

3- Déterminer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.

4- Quelle est la loi de la variable aléatoire Y qui prend la valeur de 1 si $X \leq 1$ et 0 sinon. En déduire E(Y) et V(Y).

Exercice 3 :

Soit X une variable aléatoire définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x < 1 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1- Calculer la fonction de répartition de X ?

2- Calculer p ($3/4 \leq X < 5/4$) ?

Exercice 4 :

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité de probabilité s'écrit :

$$f(x) = \begin{cases} \beta(4x - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1- Déterminer la constante β pour f(x) soit bien une densité de probabilité ?
2- En déduire E(X) et V(X).
3- Déterminer la fonction de répartition de X.
4- Calculer la probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre 1 et 3

Exercice 5 :

On considère la variable aléatoire réelle continue X, définie par la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sin on} \end{cases}$$

1- Déterminer la valeur du réel λ. Trouver la fonction de répartition, F(x) de X ?
2- Calculer l'espérance mathématique et la variance de X ?
3- Calculer la médiane et l'intervalle interquartile de X ?
4- Soit la transformation linéaire Y = α X + β. Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y ?

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire continue de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^{\lambda-1} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, a] \end{cases}$$

1- Déterminer la valeur de a pour f(x) soit une d.d.p.
2- Déterminer la fonction de répartition de X.
3- On pose Y= **- Log X**, déterminer la densité de probabilité de Y.
4- Calculer E(X) et V(X).
5- En déduire E(Y) et V(Y).
6-

Exercice 7: Soit X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est donnée par:

$$f(x) : \begin{cases} \dfrac{4-x}{10} & x \in [0,2] \\ \dfrac{1}{5} & x \in [2,4] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1- Représentez graphiquement f(x) et vérifiez qu'il s'agit d'une densité de probabilité.

1- Déterminez la valeur modale de X.
2- Déterminez la fonction de répartition correspondante et la représenter graphiquement.
3- Déterminez la valeur médiane de X.
4- Déterminez l'espérance et la variance de X.
5- Déterminer a et b tel que:
   - $P(a \le X \le 8) = 1/5$
   - $P(1 \le X \le b) = 1/2$

6- Soit la variable aléatoire continue Y définie par Y = -2X+1, déterminez l'espérance et la variance de Y, déduire la covariance entre X et Y.

Exercice N°8 (Mai 2010)

Dans un hypermarché, le temps de réponse du service après vente, suite à une réclamation d'un client, est une variable aléatoire X de densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{\frac{-x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1- Déterminer la constante k pour que f(x) soit une densité de probabilité (d.d.p).
2- Déterminer la fonction de répartition F(x) de la variable aléatoire X.
3- Déterminer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X de deux manières différentes.
4- Pour étudier le rendement de ce service, on définit une nouvelle variable aléatoire $Y = \frac{X}{2} - 1$.
5- Déterminer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire Y.
6- Déterminer la fonction de répartition de Y. En déduire la densité de probabilité de Y g(y).

Exercice N°9

Soit x une variable aléatoire admettant une densité de la forme :

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x \in \left]-\infty;1/2\right[\cup \left[4;+\infty\right[\\ \dfrac{\alpha}{x^2} \quad \text{si} \quad x \in \left[1/2;4\right[\end{cases}$$

1- Déterminer α pour que f soit une densité de probabilité ? en déduire sa fonction de répartition. $F_x(x)$
2- Déterminer la probabilité correspondant aux valeurs de X comprises entre 1 et 5.
3- Calculer l'espérance mathématique et la variance de X par deux méthodes. En déduire l'écart-type.
4- Soit la transformation suivante : $Y = X^2 + 3$
   a- Déterminer la fonction de répartition $F_y(y)$
   b- Calculer et interpréter la médiane de Y ?
   c- Déterminer l'intervalle interquartile de Y, commenter ?