I.H.E.C Carthage **Série N° 2** 1ère L.F.G Et L.A.G

Exercice 1 :

Déterminer et représenter le domaine des fonctions suivantes :

$$f(x,y)=\sqrt{2-|x-y+1|} \qquad f(x)=\sqrt{\frac{y-x^2-1}{|x-y|-1}}$$

$$f(x,y)=\ln\left[\frac{4-(x+1)^2-(y-1)^2}{x+y-2}\right]$$

$\sqrt{1-xy}$

$$f(x,y)=\cancel{\sqrt{xy-1}}+\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{1-|x|}{2-|y|}}$$

Exercice n°2 : Déterminer la nature des courbes de niveau des fonctions suivantes :

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{3-x^2-y^2}$ courbe de niveau k (discuter)

b) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2-1\right)$ courbe de niveau k

c) $f(x,y)=\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}$ courbe de niveau k

d) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{8-x^2-y^2}$ courbe de niveau 2

e) $f(x,y)=\ln\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)$ courbe de niveau k

Exercice 3 :

Soient les fonctions à 2 variables f et g définies par :

$$\begin{cases} f(x,y)=\dfrac{x^2(y+2)+2y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ f(0,0)=2 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x,y)=\dfrac{x(x-1)^2+(y-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2} & si\ (x,y)\neq(1,1) \\ g(1,1)=1 & \end{cases}$$

1) En revenant à la définition étudier l'existence des dérivées partielle 1eres de f au point (0,0)

2) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ pour $(x,y)\neq(0,0)$

3) En revenant à la définition étudier l'existence des dérivées partielles premières de g aux points $(1,1)$

4) Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ puis $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y)\neq(1,1)$

Exercice 4 :

Calculer les dérivées partielles 1eres et secondes des fonctions suivantes :

1) $f(x,y)=xy^2-4x^2+3x^3y+2x-4$

2) $f(x,y)=\ln(xy)+xy-1$

3) $f(x,y)=x^2+2xy+y^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\ln\left(e^x+e^y\right)$

4) $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)e^{xy}$

5) $f(x,y)=\sqrt{\ln(2x+3y+1)}$

6) $f(x,y)=\sqrt{xy+y^2}$

7) $f(x,y)=\frac{\ln(x+y)}{x+y}$

8) $f(x,y)=\sqrt{(2x-y)(x+y)}$

9) $f(x,y)=(x+y-2)^2+e^{\left(x^2-2y^2-xy\right)}$

Exercice 5 :

$e^{xy}=y\,e^{xy}$

Soit $f(x,y)=2xy+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+x\ln x-(x+y)+2+y\ln y$

1°/ a- Déterminer et représenter le domaine de f.

b- Calculer les dérivées partielles 1ères et secondes de f

2°/ Ecrire le développement limite de f à l'ordre 2 au voisinage de $(1,1)$.

3°/ a- Déduire l'équation de plan tangent (P) à la surface représentative de f au point $(1,1,f(1,1))$ sa position avec (Cf).

b- Déduire une valeur approchée de $f(1,05\ ;\ 0,99)$.

4°/ Donner une estimation de la variation relative de f lorsque x augmente de 5% et y de 10% à partir de $(1,1)$.

Exercice 6 : Soit $f(x,y)=48\sqrt{2x+y+1}-4x^2-y^2-40$

1°/ a- Déterminer et représenter le domaine de f.

b- Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.

c- donner l'équation du plan tangent (P) à (Cf) au point $\left(\frac{1}{2},-1,6\right)$ et déterminer sa position avec (Cf).

$f(\frac{1}{2};-1)=6$

d- Etudier la convexité de f sur son domaine.

2°/ a) Montrer que l'équation $f(x,y)=0$ permet de définir une fonction implicite φ au voisinage de $(1,-2)$.

b) Donner de développement limité de φ à l'ordre 1 au voisinage 1.

c) On se place au point $(\frac{1}{2},-1)$

On suppose x et y augmentent de 3 % à partir de ce point.

Calculer une valeur approchée de la variation relative de f.

Exercice 7 : Soient $f(x,y)=\sqrt{y-xy}+2y-x+8$ et $g(x,y)=x^2+y^2-ln(2x-y)$

1°) a) Déterminer et représenter le domaine de f et g.

b) Montrer que l'équation $f(x,y)=0$ permet de définir une fonction implicite φ au voisinage de $(2,-4)$.

c) Ecrire le développement limité de φ à l'ordre 2 au voisinage de 2.

2°) Etudier la convexité de g sur son domaine.

3°) Donner l'équation du plan tangente à (Cg) au point (2,3,13) et préciser sa position avec (Cg).

Exercice 8 : On donne les fonctions suivantes :

$f(x,y)=\sqrt{x+\sqrt{xy+x^2}}$; $g(x,y)=x^2y+(xy)^{\frac{3}{2}}$

$h(x,y)=x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y}$

1°) Préciser si les fonctions données sont homogènes ou non.

Si oui préciser leur degré d'homogénéité.

2°) On se place au point (a,b) et on suppose que x et y augmente de **t**% à partir de ce point avec $t \in]0,1[$.

Donner la valeur exacte de la variation relative de f.

Exercice 9 :

On donne $f(x,y)=\dfrac{ln(x+y)}{x+y}$ et $g(x,y)=\sqrt{(2x-y)(x+y)}$

1°) *a*) Déterminer et représentée le domaine D de f et Δ de g.

b) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.

c) Sur quel domaine f est convexe et sur quel domaine f est concave.

d) Soit (x_1,y_1) tel quel $(x_1+y_1)=e^{\frac{5}{4}}$.

Donner l'équation du plan tangent à (Cf) au point $(x_1,y_1,f(x_1,y_1))$ puis la position de C_f avec ce plan.

2°) *a*) Vérifier que g est homogène.

b) Soient les droites $d_1 : y=2x$ et $d_2 : y=-x$

$(x_0,y_0)\in(\Delta)\setminus\{d_1,d_2\}$

Calculer $e(g/x)(x_0,y_0)/+e(g/y)(x_0,y_0)$

3°) On pose $\Delta_1=\{(x,y)\in\Delta \text{ tels que } x\geq 0\}$.

$\Delta_2=\{(x,y)\in\Delta \text{ avec } x\leq 0$.

a) Etudier la convexité de g sur Δ_1 et Δ_2.

b) Donner l'équation du plan tangente à (Cg) au point $(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ puis déduire la position du plan et (Cg).