I.H.E.C Carthage **Série N° 3** **1ère L.F.G Et L.A.G**

Exercice 1 :

On donne les fonctions suivantes :

$f(x,y)=\ln(x^2+y^2+xy+2)$; $g(x,y)=-(x-y)^2$; $h(x,y)=-x^2-y^2+4x-6y-1$

$k(x,y)=e^{x^2+y^2+mxy}$ ou $m\in]-2,2[$; $l(x,y)=1-x^2-y^2-e^{x^2+y^2}$

1) En revenant à la définition montrer que

a) f admet au point (0,0) un minimum local.

b) g admet au point (0,0) ou $a\in\mathbb{R}$, un maximum relatif

2) En revenant à la définition montrer que

   a) k admet au point (0,0) un minimum global

   b) h admet au point (2,-3) un maximum absolu.

   c) l admet un maximum global au point (0,0)

3) soit $R(x,y)=\ln(x^2+y^2-xy+2)$

   a) Ecrire le développement limité de R au point (0,0) à l'ordre 2

   b) Déduire que R admet un minimum local au point (0,0)

Exercice 2 :

Etudier l'existence et la nature des extrémums des fonctions suivantes :

1/ $f(x,y)=(y-x)e^{xy}$ 2/ $f(x,y)=3(x+y)^2+2(y-x)^3+6(x-y)$ 3/ $f(x,y)=\frac{1}{xy}+x+y$

4/ $f(x,y)=-x^2-mxy-y^2+2y$ ou $m\in\mathbb{R}$ (Discuter suivant m)

5/ $f(x,y)=x-y+\frac{1}{2}(e^{x-y}+e^{y-x})$ (étudier au paravent la convexité de f)

6/ $f(x,y)=x^2+xy+y^2-\ln(x+y)$ (étudier la convexité de f).

7/ $f(x,y)=mx^2+x-xy+y+y^2$ ou $m\in\mathbb{R}$ (Discuter suivant m)

Exercice 3 :

Etudier l'existence et la nature des extrémums de f sous la contrainte g dans chacun des cas.

1/ $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ S/C $g(x,y)=\ln x+\ln y=(-2)$

2/ $f(x,y)=(x-y)^2$ S/C $g(x,y)=y+x^2-2=0$

3/ $f(x,y)=2xy$ S/C $g(x,y)=4x^2+2y^2-3=0$

4/ $f(x,y)=\ln x+\ln y$ S/C $g(x,y)=x^2+y-12=0$

5/ $f(x,y) = x^2 - my - y^2 + 2y \quad S/C \quad g(x,y) = x + y = 1$

6/ $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 2)^2 \quad S/C \quad g(x,y) = (x-1)^2 + 4y^2 = 4$

Exercice 4 :

A/ Soit
$f(x,y) = \sqrt{y - xy} + 2y - x + 8$

1) **4)** Déterminer et présenter le domaine de f.

5) Montrer que l'équation $f(x,y)=0$ permet de définir une fonction implicite g au voisinage de (2,-4).

6) Ecrire le développement limité de g au voisinage de 2 à l'ordre 1.

B/ $f(x,y) = x^2 + y^2 - In(2x - y)$

1/ a) Déterminer et représenter le domaine D de f.

b) Déterminer les points critiques de f.

2/ a) Etudier la convexité de f sur son domaine de définition

b) En déduire la nature des extrémums de f

(Préciser le caractère local ou global de ces extrémums).

3/ a) Donner l'équation du plan tangent (P) à la surface (C_f) au point A(2,3,13) et préciser sa position avec (C_f)

b) Donner une estimation de la de la variation relative de f lorsque x augmente de 5 % et y diminue de 5 % à partir du point A(2,3,13).

c) Etudier l'existence et la nature des extrémums de $f(x,y)=(x-y)^2$ sous la contrainte $g(x,y)=y+x^2-2=0$.

Exercice 5 :

Soit $f(x,y) = 48\sqrt{2x + y + 1} - 4x^2 - y^2 - 40$

1/ a) Déterminer et représenter le domaine de f

b) Montrer que l'équation $f(x,y)= 0$ permet de définir une fonction implicite φ au voisinage de (1,-2)

c) donner le développement limité de φ à l'ordre 1 au voisinage de (1)

2/ Soit $g(x)=4x^3 + x^2 - 36$.

a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ n'admet qu'une seule solution puis vérifier que 2 est la solution demandée.

b) Déterminer les points critiques de f.

c) Etudier la convexité de f sur son domaine puis déduire la nature des points critiques.

d) Déduire la valeur maximale de f.

3/ Optimiser f sous la contrainte $h(x,y)=4x^2 + y^2 - 8=0$

B- Soit $f(x, y) = e^{x+y} - \ln(x+y) + (1-e)(x+y)$

1/ Soit $g(t) = e^t - \frac{1}{t} + (1-e)$ ou $t \in \,]0, +\infty[$

a) Montrer que l'équation $g(t) = 0$ n'admet qu'une seule solution qui est 1.

b) Déterminer et représenter le domaine de f.

c) Déterminer les points critiques de f.

d) Etudier la convexité de f sur son domaine puis la nature des points critiques de f

2/ a) Montrer que $\forall (x,y) \in D$ on a $f(x, y) \geq 1$

b) Optimiser f sous la contrainte $h(x, y) = y - x = 0$

Exercice 6 :

$$f(x,y)=2x+2y-x^2-xy-y^2-2e^{x+y}$$

1/ a) calculer les dérivées partielles 1ères et secondes de f.

b) montrer que f est concave sur $\mathbb{R}^2$

2/ soit $h(t)=2-3t-2e^{2t}$

a) Montrer que l'équation $h(t)=0$ n'admet que la seule solution 0

b) Déterminer alors les points critiques de f et déduire $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) \leq -2$

3/ Optimiser f sous la contrainte $g(x, y) = x^2 + y^2 - 8 = 0$ (on pourra utiliser que l'équation $2-t-2e^t = 0$ admet 0 comme seule solution).

B- $f(x,y)=\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$

1 / a) déterminer et représenter le domaine de f.

b) calculer les dérivées partielles 1 eres et secondes de f.

2/ a) Montrer que f est homogène et vérifier l'identité d'Euler

b)Etudier la convexité de f sur son domaine.

c)Donner l'équation du plan tangent à (C_f) au point (2,1 ;-ln3) et sa position par rapport à (C_f)

3/ a) Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de (2,1)

b)Donner une valeur approchée de f(2,01 ; 0,99)

c)On suppose que x augmente de 5% à partir de 2 et y diminue de 5%. Déterminer la variation relative correspondante de f à l'aide d'un calcul approché.

Exercice 7 :

$$f(x,y)=(x-1)(y-2)((x+y-6)$$

1/ a) montrer que (4,2) et (2,3) sont des points critiques de f (on ne demande pas de chercher les points critiques).

b) f présente telle un extrémum local au point (4,2) un extrémum local au point (2,3) ?

2/ Déterminer les extrémums de f sous la contrainte $g(x,y)=x-y+2=0$

Soit $f(x,y) = 2e^{2x}+2e^{2y}+2e^{x+y}-e^x-e^y$.

1/ a) calculer les dérivées partielles 1ères et secondes de f.

b) Montrer que $f\left(\ln\left(\frac{1}{6}\right),\ln\left(\frac{1}{6}\right)\right)=\left(-\frac{1}{6}\right)$

c) Montrer que $f(x,y)+\frac{1}{6}=2\left(e^{x}+\frac{1}{2}e^{y}-\frac{1}{4}\right)^{2}+\frac{3}{2}\left(e^{x}-\frac{1}{6}\right)^{2}$

d) déduire que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $f(x,y)\geq\left(-\frac{1}{6}\right)$. Que peut on conclure?

2/ Ecrire le développement limité de f au point (0,0) à l'ordre 2 puis déduire l'équation du plan tangent à (C_f) au point (0;0,4) et sa position par rapport à C_f au point (0 ;0,4).

3/ Montrer que l'équation $f(x, y) = 4$ permet de définir une fonction implicite φ au voisinage de (0,0) puis donner son $DL_1(0)$.

Exercice 8 :

A- Soit $f(x, y) = (x - y)^2$ et $g(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 9$

Etudier l'existence et la nature des extrémums de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$

B- Soit $f(x, y) = \frac{\ln(x+y)}{(x+y)}$

1/ a) donner l'ensemble de définition de f et le représenter.

b)Calculer les dérivées partielles 1" et secondes de f.

c)Déterminer le domaine sur lequel f est convexe puis le domaine sur lequel f est concave

2/ a) Dresser le tableau de variation de $h(t) = \frac{\ln t}{t}$

b) déduire si $x + y > 0$ on a $f(x, y) \leq \frac{1}{e}$

3/ Soit $(x_0, y_0) \in D$ telque $x_0 + y_0 = e$. Calculer $f(x_0, y_0)$ et en déduire que f admet en (x_0, y_0) un extrémum et préciser sa nature.

4/ Soit (x_1,y_1) telque $x_1 + y_1 = e^{\frac{5}{4}}$ donner l'équation du plan tangent au point $A(x_1, y_1, f(x_1, y_1))$ puis sa position.