

Cahier des travaux dirigés en statistique (2^{eme} LFG- 2^{eme} PREPA)

Hassen Mzali, Imen Sayadi, Jihène Jbenyani, Sawssen Chaieb Mahmoud Tnani,
Nadia Labidi, Oumayma Melki

3 octobre 2016

UNIVERSITE DE CARTHAGE

Institut des hautes études commerciales de carthage (IHEC)

Lois de probabilité continues

Exercice 1 :

Soit (k) une constante positive et une fonction f , d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (1)$$

(2)

1) Calculer k de façon que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue X . Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2) On pose $Y = -|X - \frac{1}{2}|$. Calculer la fonction de répartition de Y .

Exercice 2 :

Dans un magasin de pièces détachées, le temps nécessaire pour servir des clients est distribué selon une loi exponentielle avec une durée moyenne de service de 5 minutes par client.

1) Quelle est alors la valeur du paramètre de cette loi ?

2) Quelle est la probabilité pour que la durée de service soit inférieure à 2 minutes ? Supérieure à 6 minutes ? Comprise entre 3 et 8 minutes ?

3) Est-ce exacte de dire qu'il y a une chance sur deux pour que la durée de service d'un client soit inférieure à la durée moyenne de service ?

Exercice 3 :

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \ (k > 0) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (3)$$

(4)

1) Déterminer la valeur de la constante k pour que f soit une densité de probabilité de la v.a. X .

2) Déterminer la fonction de répartition F de la v.a. X .

3) Montrer que la variable aléatoire $Y = e^{-\frac{X}{2}}$ suit une loi uniforme $U[0,1]$.

Exercice 4 :

Soient les variables aléatoires suivantes : $Y \mapsto N(10, \sigma^2)$, $U \mapsto N(5, 2^2)$ et $V \mapsto N(5, 5^2)$.

- 1) Déterminer σ pour que $P(7 \leq Y \leq 13) = 0.3$.
- 2) Déterminer k pour que l'on ait : $P(U < 10) = P(V < k)$.
- 3) Déterminer la loi de $U+V$, la loi de $U-V$ sachant que U et V sont indépendantes.

Exercice 5 :

Soit $X \sim N(m, \sigma^2)$ telle que $P(X < 3) = 0.1587$ et $P(X > 12) = 0.0228$. Calculer la probabilité $P(1 < X < 10)$.

Exercice 6 :

Une étude statistique auprès d'un magasin de bricolage a permis d'établir, que la demande de location de petites machines industrielles était distribuée normalement avec une moyenne de 200 unités par mois et un écart-type de 30 unités.

- 1) Si l'entreprise a en stock, pour le mois qui débute, 230 unités, quelle est la probabilité qu'elle ne puisse suffire à la demande ?
- 2) L'entreprise veut s'assurer qu'elle ne sera pas en pénurie de stock plus de 5 pourcent du temps. Quel doit être le nombre de machines à stocker mensuellement pour respecter cette condition ?

Exercice 7 :

Un fabricant a constaté que la durée de vie en années de ses machines est une v.a. normale, de moyenne 7 et d'écart-type 2.

- 1) Sachant que la garantie est de 2 ans, calculer la proportion de machines que le fabricant doit s'attendre à remplacer. En déduire le nombre correspondant sur 100 000 ventes.
- 2) Le même fabricant envisage de doubler la durée de garantie, pour la porter à 4 ans. Par quel coefficient le nombre de machines à remplacer est-il multiplié ?
- 3) Construire l'intervalle symétrique en probabilité dans lequel fluctue la durée de vie dans 80 pourcent des cas.

Convergence, échantillonnage et estimation

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Hypergéométrique $H(1000; 50; p)$.

- 1) Par quelle(s) lois peut-on approcher la loi de X lorsque $p = 0,5$?
- 2) Par quelle(s) lois peut-on approcher la loi de X lorsque $p = 0,05$?

Exercice 2 :

Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure. Soit X la VAR égale au nombre d'employés qui téléphonent à un instant t fixé. Quel est le nombre de lignes N que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit au plus égale à 0,025.

Exercice 3 :

un dé est lancé 9000 fois. On cherche à déterminer la probabilité de l'événement " on a obtenu 6 entre 1400 et 1600 fois " On note X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus.

1. Quelle est la loi de X

2. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X.
3. Calculer la probabilité demandée dans l'énoncé.

Exercice 4 :

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance mathématique m et de variance σ^2 . Montrer que $\sqrt{n}(\bar{X} - m) \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$

Exercice 5 :

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires suivant une loi normale $N(2, 4)$ avec $n=25$.

I) 1) Déterminer la loi de la variable $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$

2) Calculer $P(\bar{X} < 6)$; $P(\bar{X} < 12)$; $P(\bar{X} > 1)$

3) soit $Y = \frac{1}{k} \sum (x_i - 2)^2$

a) déterminer k pour que Y suit une loi bien déterminer, en déduira son espérance et sa variance.

b) - déterminer a tel que $P(Y \geq a) = 0,95$

- déterminer b tel que $P(Y \leq b) = 0,1$

II) On suppose que m est inconnue

1) Déterminer c tel que $P(\sum (X_i - \bar{X})^2 \geq C) = 0,9$

III) On suppose que σ^2 est inconnue

a) Calculer $P(\bar{X} \leq 3)$ sachant que $\sum X_i = 50$ et $\sum X_i^2 = 316$

Exercice 6 :

I) Soit $(X_1, \dots, X_n) \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$

Quelles sont les lois des variables suivantes :

$$U = \frac{X_i - m}{\sigma}, V = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - m}{\sigma}, Z = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}, T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - m}{s} \quad (5)$$

Avec

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n - 1} \quad (6)$$

On suppose deux échantillons $(X_1, \dots, X_{n_1}) \rightsquigarrow N(m_1, \sigma_1^2)$ et $(Y_1, \dots, Y_{n_2}) \rightsquigarrow N(m_2, \sigma_2^2)$.

Sachant que X_i et Y_i sont indépendants.

1) Déterminer la loi de $\bar{X} - \bar{Y}$ sachant que $m_1 = m_2 = 2$ et $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 4$ et $n_1 = n_2 = 16$; calculer $P(\bar{X} - \bar{Y} \leq 6)$.

2) On suppose que σ_1^2 et σ_2^2 sont inconnues mais égales $P(\bar{X} - \bar{Y} \leq 3)$ sachant que $n_1 = n_2 = 10$; $S_1^2 = 95$; $S_2^2 = 100$

Exercice 7 :

Le nombre de panne d'un appareil électronique est une variable aléatoire dont la densité de probabilité est une loi de poisson de paramètre λ .

$$f(x, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad (7)$$

1) Déterminer un estimateur de maximum de vraisemblance de λ

2) λ est-il sans biais.

3) λ est-t-il convergent ? est-il efficace ?

Exercice 8 : (juin 2015)

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale $N(4, \theta)$, $E(X) = 4$, $V(X) = \theta$.

- 1) Déterminer la vraisemblance de l'échantillon.
- 2) Déterminer $\hat{\theta}$ l'estimateur de maximum de vraisemblance.
- 3) $\hat{\theta}$ est-t-il sans biais.
- 4) $\hat{\theta}$ est-t-il convergent ?

Exercice 9 :

Soit X une variable aléatoire représentant la durée d'attente dans un service hospitalier dans un hôpital A et admettant une densité de probabilité :

$$\frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \text{ Si } X \geq 0 \quad (8)$$

Où θ est un paramètre inconnu. On prélève un échantillon de taille n .

- 1- Calculer l'espérance mathématique de X et sa variance.
- 2- Montrer que $\hat{\theta}$ est un estimateur sans biais et convergent de θ . Est-il efficace ?

exercice 10 :

A l'issue d'une opération de votes pour le choix entre deux candidats A et B , un cabinet de sondage a demandé à un échantillon le candidat pour lequel ils ont voté. Soit ' X ' la variable 'voté pour le candidat ' A '.

- 1) Quelle est la loi de ' X '
- 2) Déterminer ' P ' l'estimateur de maximum de vraisemblance.
- 3) ' P ' est-t-il convergent ?

Exercice 11 :

Soit un échantillon aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ de taille $n = 25$, tiré d'une population normale de moyenne m et de variance σ^2 .

On donne $\sum X_i = 50$ et $\sum X_i^2 = 200$

- 1) On suppose que m est inconnue et $\sigma^2 = 4$

Construire un intervalle de confiance au niveau de 95 pourcent pour la moyenne m de la population.

- 2) On suppose m et σ^2 sont inconnues.

a) Construire un intervalle de confiance au niveau de 95 pourcent pour la moyenne m de la population.

b) Construire un intervalle de confiance au niveau 90 pourcent pour la variance σ^2 de la population.

Exercice 12 : (juin 2015)

On considère les deux échantillons indépendants suivants :

Un échantillon aléatoire $X_1, X_2, \dots, X_{n1}$, indépendantes et identiquement distribuées de

taille $n_1 = 25$, tiré d'une population normale d'espérance m_1 et d'écart-type σ . On donne $\sum X_i = 50$ et $\sum X_i^2 = 220$; et un échantillon aléatoire $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$, indépendantes et identiquement distribuée de taille $n_2 = 15$, tiré d'une population normale d'espérance m_2 et d'écart-type σ . On donne $\sum Y_i = 25$ et $\sum Y_i^2 = 180$.

On suppose que m_1 , m_2 et σ^2 sont inconnus.

- 1) Donner un estimateur sans biais de $m_1 - m_2$. Justifier.
- 2) Donner, dans ce cas, le meilleur estimateur sans biais de σ^2
- 3) Déterminer un intervalle de confiance au niveau 90 pourcent pour σ^2
- 4) Déterminer un intervalle de confiance au niveau 90 pourcent pour $m_1 - m_2$ dans le cas où $\sigma^2 = 4$

Exercice 13 :

Soit X une variable aléatoire de loi normale $N(m, \sigma^2)$ de moyenne et de variance inconnues. Un échantillon de 25 observation a fourini les valeurs suivante : $\bar{X} = 27,5$ et $\sum (X_i - \bar{X})^2 = 231$

- 1) Déterminer un intervalle de confiance au niveau 90 pourcent pour m .
- 2) Nous nous proposons de tester l'hypothèse $H_0 : m = 25$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : m = 30$.
 - a/ Donner la règle de décision pour un risque $\alpha = 5$ pourcent.
 - b/ Quelle est la décision à retenir?