Chapitre 4: Les emprunts indivis

1 : Définition

Un emprunt indivis est un emprunt ordinaire accordé à l'emprunteur par une <u>seule</u> institution financière. Il n'y a qu'un seul prêteur, il est donc indivisible, d'où le qualificatif indivis.
Le remboursement de cet emprunt s'effectue généralement, par annuités de fin de période.
Chaque annuité est composée de deux éléments :

- Un remboursement d'une partie du capital emprunté, appelé l'amortissement.
- Une partie intérêt calculée sur la base du taux d'intérêt convenu entre les deux parties et du capital restant dû dépendant.
  Annuité = amortissement + intérêts

2 : Les modes d'élaboration des plans d'amortissement des emprunts indivis

Considérons le capital C_0 emprunté pour n périodes à un taux d'intérêt i. L'emprunteur s'engage à rembourser le capital emprunté (capital et intérêt) sous forme de n annuités $a_1, a_2, \dots, a_n$ de telle sorte que la dernière annuité « a_n » mette fin à la dette.

Le remboursement d'un emprunt dépend du mode d'amortissement utilisé (in fine, par annuités constantes ou par amortissement constant). D'une façon générale le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 i$	m_1	$a_1 = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 i$	m_2	$a_2 = I_2 + m_2$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} i$	m_p	$a_p = I_p + m_p$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} i$	m_{n-1}	$a_{n-1} = I_{n-1} + m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} i$	m_n	$a_n = I_n + m_n$

Avec

C_0 capital restant dû au début de la première année soit le montant de l'emprunt
I_p intérêt de la pème période
m_p amortissement de la pème période.
a_p annuité de la pème période
C_{p-1} capital restant dû au début de la pème période

- Les amortissements servent à rembourser la dette donc leur somme est égale au capital emprunté :

$$C_0 = \sum_{p=1}^{n} m_p$$

- Après le paiement du nième amortissement m_n, le capital restant dû est égal à zéro

$$C_n = 0$$
$$C_{n-1} - m_n = 0$$
$$C_{n-1} = m_n$$

Exemple d'un tableau d'amortissement d'un emprunt

C_0= 5 000 000 dt

i=10%

n= 5 ans

période	Vo	I	A	a
1	5 000 000	500 000	818 987,404	1 318 987,404
2	4 181 012,596	418 101,2596	900 886,1444	1 318 987,404
3	3 280 126,452	328 012,6452	990 974,7588	1 318 987,404
4	2 289 151,693	228 915,1693	1 090 072,235	1 318 987,404
5	1 199 079,455	119 907,9455	1 199 079,4	1 318 987,404

$$C_{n-1} = m_n$$

Relation entre deux annuités successives :

$$\begin{cases} a_p = m_p + I_p = m_p + C_{p-1} \times i \\ a_{p+1} = m_{p+1} + I_{p+1} = m_{p+1} + C_p \times i \end{cases}$$

$$a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p + C_p \times i - C_{p-1} \times i$$

$$a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p + (C_p - C_{p-1}) \times i$$

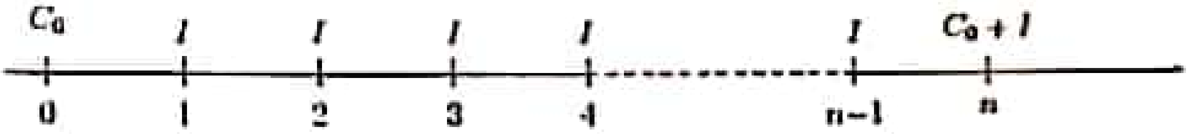
$$a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p - m_p \times i$$

$$\boxed{a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p \times (1+i)}$$

3 : Les différentes modalités de remboursement des emprunts indivis

3.a. Remboursement in fine

Le remboursement du capital d'un emprunt s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat. Le montant de l'intérêt (I) versé à chaque échéance, prévue par le contrat, est égal au montant emprunté multiplié par le taux d'intérêt



Le tableau d'amortissement se présente comme suit

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = I = C_0 i$		$a_1 = I_1 = I$
2	C_0	$I_2 = I = C_0 i$		$a_2 = I_2 = I$
p	C_0	$I_p = I = C_0 i$		$a_p = I_p = I$
n-1	C_0	$I_{n-1} = I = C_0 i$		$a_{n-1} = I_{n-1} = I$
n	C_0	$I_n = I = C_0 i$	C_0	$a_n = I_n + C_0 = I + C_0$

Valeur du 1[er] Amortissement (m_1) en fonction de l'annuité (a)

On a $m_n = m_1(1+i)^{n-1}$

Et $a = m_n(1+i)$

$a = m_1(1+i)^{n-1}(1+i)$

→ $\boxed{a = m_1(1+i)^n}$

La relation entre C_0 et le 1[er] amortissement (m_1)

$$C_0 = \sum_{p=1}^{n} m_p$$

$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots m_n$

$C_0 = m_1 + m_1(1+i) + m_1(1+i)^2 + \cdots m_1(1+i)^{n-1}$

→ $\boxed{C_0 = m_1\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$

Et $\boxed{m_1 = C_0\frac{i}{(1+i)^n - 1}}$

Exemple 4 :

Pour financer un investissement, l'entreprise Y a contracté auprès d'une seule un emprunt de 300 000dt payable sur 20 ans au taux annuel de 6%. Le remboursement se fera en fin de période par annuités constantes.

Construire la 12[ème] ligne du tableau d'amortissement de cet emprunt.

Calcul de la dette amortie et non amortie après le versement de la p[ème] annuités (p<n)

Après le paiement de la p[ème] annuité, la partie de l'emprunt qui a été remboursée s'élève à la somme des p premiers amortissements : R_p

$R_p = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots m_p$

$R_p = m_1 + m_1(1+i) + m_1(1+i)^2 + \cdots m_1(1+i)^{p-1}$

$\boxed{R_p = m_1\frac{(1+i)^p - 1}{i}}$

On a $m_1 = C_0\frac{i}{(1+i)^n - 1}$

Donc $R_p = C_0\frac{i}{(1+i)^n - 1}\left(\frac{(1+i)^p - 1}{i}\right)$

→ $\boxed{R_p = C_0\frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}}$

La dette non amortie est égale à $\boxed{C_p = C_0 - R_p}$