3ème Année

1er Semestre

Nom du Document :

ECONOMETRIE

Séries + Correction

N° du Document : **3**

N° de la Boite : **Q1**

Prix
Ph:1240
Sp : 800
Total : 2040

IHEC CARTHAGE **2014/2015**

ECONOMETRIE
TD n°1
3 Finance +HEC

Exercice 1

A fin d'étudier comment varie les coûts de maintenance y (exprimé en dinars) d'un tracteur en fonction de l'âge x (exprimé en mois) de celui-ci on collecté les données suivantes:

On vous donne les informations suivantes:

$T = 15$ mois

$$\sum x_t = 362 \ ; \sum y_t = 9380$$
$$\sum (x_t - \bar{x})^2 = 3753{,}73 \ ; \sum (y_t - \bar{y})^2 = 626973{,}33$$
$$\sum (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y}) = 47999{,}33$$

On suppose que les variables y_t et x_t sont liées par :

$y_t = a + bx_t + u_t$ avec $u_t \rightsquigarrow iid(0, \sigma^2)$

A/ Calculer :

1) les estimateurs des MCO $\hat{a}$ *et* $\hat{b}$ de a et b
2) le coefficient de détermination R²
3) l'estimation $\hat{\sigma}^2$ de σ²
4) les écarts - types estimés de $\hat{a}$ *et* $\hat{b}$

B/ On complète le modèle en admettant la normalité des u_t

1) Déterminer un intervalle de confiance pour b au niveau 95 %
2) on veut tester au risque 5%:

$$\begin{cases} H_0 : b = 0 \\ H_1 : b \neq 0 \end{cases}$$

3) La direction de maintenance utilise un b égal à 15. Le nouveau résultat obtenu confirme-t-il cette valeur au risque 5 %. Dans le cas où cette valeur serait infirmée quelle nouvelle valeur choisir ?

4) Comment testez-vous l'hypothèse : le coût de maintenance est fonction croissante de l'âge du tracteur ?

5) Donner un intervalle de prévision à 95 % pour le coût de maintenance correspondant à un tracteur de 4 ans.

Exercice 2

On dispose de 16 observations portant sur deux variables y et x et on retient comme modèle explicatif :

$\Delta y_t = a + b\Delta x_t + u_t$; $(\Delta y_t = (y_t - y_{t-1}))$ où u_t est une perturbation vérifiant les hypothèses classiques de la méthode des MCO.

Le résultat de l'ajustement est :

$$\widehat{\Delta y_t} = 0{,}267 + 0{,}595 \Delta x_t$$
$$(0{,}133) \quad (0{,}12)$$

Déterminer un intervalle de confiance à 90 % pour b.

__NB:__ Les chiffres entre parenthèses sont les écarts-types estimés des paramètres.

Exercice 3

L'analyse d'une série temporelle de 12 ans concernant la demande d'habillement y en fonction du revenu x des ménages a conduit à :

$$\widehat{\mathrm{Log}(y_t)} = 0{,}65 + 1{,}1\, \mathrm{Log}(x_t)$$
$$(0{,}11) \quad (0{,}07)$$

Peut-on dire que l'élasticité de la demande d'habillement soit égale à l'unité ?

Exercice 4

Le modèle d'importation suivant a été établi à partir d'une chronique de 10 années :

$$\hat{y}_t = -54{,}07 + 0{,}252\, x_t \quad ; \ R^2 = 0{,}96$$
$$(11{,}96) \quad (0{,}009)$$

Où y_t et x_t désignent, respectivement, les importations et la production industrielle brute.

1) Peut-on affirmer que la propension marginale à importer est significativement différente de zéro au risque 1 % ?

2) Les services de la planification utilisant une propension marginale à importer de 0,23. Le nouveau résultat obtenu confirme-t-il cette valeur au risque 5 % ? Dans le cas où cette valeur serait infirmée quelle nouvelle valeur choisir ?

Exercice 5 :

On considère le modèle suivant :

$y_t = a + bx_t + u_t$ avec u_t un terme d'erreur vérifiant les hypothèses classiques de la méthode des MCO. Sur la base de 20 observations on a trouvé les résultats suivants :

$\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 25$ et SCR = 1300,5

pour $x_{21} = 2$ on donne l'intervalle de prévision de niveau 90 % pour y_{21} :

$$[12{,}66 \ ; \ 47{,}34]$$

1) Déterminer la prévision ponctuelle y_{21}^{p} de y_{21}
2) Déterminer $\hat{a}$ et $\hat{b}$ les estimateurs de a et b respectivement.
3) Déterminer l'écart type estimé σ_{ep} de l'erreur de prévision.
4) Déterminer l'écart type estimé de b.
5) Construire un intervalle de confiance de niveau 90 % pour b.

Exercice 6 :

Soit le modèle linéaire suivant :

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t \ , t = 1 \dots T$$

On pose $m_{xx} = \sum(x_t - \overline{x})^2$, $m_{yy} = \sum(y_t - \overline{y})^2$ et $m_{xy} = \sum(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})$

Questions :

1) Montrer que $R^2 = \hat{\beta}^2 \frac{m_{xx}}{m_{yy}}$

2) Sur la base de 22 observations on a trouvé :
$m_{yy} = 800$, $m_{xx} = 20$, $R^2 = 0{,}90$, $\bar{x} = 3$ et $\hat{\alpha} = 1$.

2-a) Construire un intervalle de confiance de niveau 95% pour $\boldsymbol{\beta}$.

2-b) Tester au seuil 5 %

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 6{,}5 \\ H_1 : \beta > 6{,}5 \end{cases}$$

2-c) sachant que pour la période t = 23 x prend la valeur 2. Construire un intervalle de prévision de niveau 95% pour y_{23}.

Exercice 7:

On considère le modèle suivant:

$y_t = bx_t + u_t$

1) Déterminer $\hat{b}$ l'estimateur des MCO de b;
2) En réalité le vrai modèle est:
$y_t = a + bx_t + e_t$ où e_t vérifie les hypothèses classique des MCO.

2-a) Montrer que $\hat{b}$ est biaisé

2-b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\hat{b}$ soit sans biais.

2

Correction de la série 1 d'Économétrie

Exercice 1:

A)

1) les estimateurs des MCO $\hat{a}$ *et* $\hat{b}$ de a et b sont;

$$\hat{b} = \frac{\sum(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum(x_t - \bar{x})^2} = \frac{47999,33}{3753,73} = 12,787$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = \frac{1}{T}\sum y_t - \hat{b}\frac{1}{T}\sum x_t = \frac{9380}{15} - 12,787\frac{362}{15} = 316,74$$

2) Le coefficient de détermination R^2?

$$SCE = \hat{b}^2 \sum(x_t - \bar{x})^2 = 12,787^2.3753,73 = 613762,516$$

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{613762,516}{626973,33} = 0,978$$

3) l'estimation $\hat{\sigma}^2$ de σ^2 est:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{T-2} = \frac{SCT - SCE}{T-2} = \frac{13210,814}{13} = 1016,216$$

4) les écarts - types estimés de $\hat{a}$ *et* $\hat{b}$:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}}^2 = \hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{T} + \frac{\bar{x}^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2}\right) = 1016,216\left(\frac{1}{15} + \frac{582,417}{3753,73}\right) = 225,42$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{a}} = \sqrt{225,42} = 15,014$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{b}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2} = \frac{1016,216}{3753,73} = 0,27 \Rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{b}} = 0,52$$

B)

1) Intervalle de confiance de b au niveau 95 %

$$I(b) = \hat{b} \pm t.\hat{\sigma}_{\hat{b}} = [12,787 - 2,16.0,52 ; 12,787 + 2,16.0,52] = [11,66 ; 13,91]$$

2) tester au risque 5%:

$$\begin{cases} H_0: b = 0 \\ H_1: b \neq 0 \end{cases}$$

La règle de décision est:

$$0 \notin I(b) \Rightarrow On\ rejette\ H_0$$

3) La direction de maintenance utilise un b égal à 15. Le nouveau résultat obtenu ne confirme pas cette valeur au risque 5 % car $15 \notin I(b)$. La valeur qu'on doit choisir doit appartenir à cet intervalle de confiance.

4) le coût de maintenance est fonction croissante de l'âge du tracteur. Ceci revient à faire le test suivant:

$$\begin{cases} H_0: b \leq 0 \\ H_1: b > 0 \end{cases}$$

$$t_c = \left|\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right| = \left|\frac{12{,}787}{0{,}52}\right| = 24{,}59 > t(13) = 1{,}77 \quad \Rightarrow On\ rejette\ H_0$$

Alors le coût de maintenance est fonction croissante de l'âge du tracteur.

5) l'intervalle de prévision à 95 % du coût de maintenance correspondant à un tracteur de 4 ans (48 mois:

$$y_{48}^p = \hat{a} + \hat{b}.48 = 316{,}74 + 12{,}787 \times 48 = 930{,}516$$

$$\hat{\sigma}_{ep}^2 = \hat{\sigma}^2\left(1 + \frac{1}{T} + \frac{(48 - \bar{x})^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2}\right) = 16411{,}094 \quad \Rightarrow \hat{\sigma}_{ep} = 128{,}105$$

$$I(y_{48}) = y_{48}^p \pm t.\hat{\sigma}_{ep} = [653{,}809 ; 1207{,}222]$$

Exercice 2;

On a estimé le modèle suivant par la méthode des MCO:

$$\Delta y_t = a + b\Delta x_t + u_t$$

Le résultat obtenu est:

$$\widehat{\Delta y_t} = \underset{(0,133)}{0,267} + \underset{(0,12)}{0,595}\,\Delta x_t$$

L'intervalle de confiance de b à un niveau de 90% est:

$$I(b) = \hat{b} \pm t.\ \hat{\sigma}_{\hat{b}} = [0{,}595 - 1{,}77.0{,}12 ; 0{,}595 + 1{,}77.0{,}12] = [0{,}3826 ; 0{,}8074]$$

Exercice 3:

L'analyse d'une série temporelle de 12 ans concernant la demande d'habillement y en fonction du revenu x des ménages a conduit à :

$$\widehat{\mathrm{Log}(y_t)} = 0{,}65 + 1{,}1\,\mathrm{Log}(x_t)$$

(0,11) (0,07)

Peut-on dire que l'élasticité de la demande d'habillement soit égale à l'unité ?

Réponse:

$$\begin{cases} H_0 : b = 1 \\ H_1 : b \neq 1 \end{cases}$$

$$t_c = \left|\frac{\hat{b} - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right| = \left|\frac{1{,}1 - 1}{0{,}07}\right| = 1{,}428 \leq t_{5\%}(10) = 2{,}22 \Rightarrow \text{on accepte } H_0$$

L'élasticité de la demande d'habillement est égale à l'unité.

Exercice 4:

Le modèle d'importation suivant a été établi à partir d'une chronique de 10 années :

$\hat{y}_t = -54{,}07 + 0{,}252\,x_t$; $R^2 = 0{,}96$

(11,96) (0,009)

Où y_t et x_t désignent, respectivement, les importations et la production industrielle brute.

1) $$\begin{cases} H_0 : b = 0 \\ H_1 : b \neq 0 \end{cases}$$

$$t_c = \left|\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right| = \left|\frac{0{,}252}{0{,}009}\right| = 28 > t_{1\%}(8) = 3{,}35 \Rightarrow \text{on rejette } H_0$$

La propension marginale à importer est significativement différente de zéro au risque 1 %

2) $$\begin{cases} H_0 : b = 0{,}23 \\ H_1 : b \neq 0{,}23 \end{cases}$$

L'intervalle de confiance au niveau 95% de la propension marginale à importer est;

$$I(b) = \hat{b} \pm t.\hat{\sigma}_{\hat{b}} = [0{,}252 - 2{,}306.0{,}009\,;0{,}252 + 2{,}306.0{,}009] = [0{,}2312\,;0{,}272]$$

$$0{,}23 \notin I(b) \Rightarrow \text{on rejette } H_0$$

La valeur que nous devrons choisir doit appartenir à l'intervalle de confiance.

Exercice 5:

On considère le modèle suivant :

$y_t = a + bx_t + u_t$ avec u_t un terme d'erreur vérifiant les hypothèses classiques de la méthode des MCO. Sur la base de 20 observations on a trouvé les résultats suivants :

$\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 25$ et SCR = 1300,5

pour $x_{21} = 2$ on donne l'intervalle de prévision de niveau 90 % pour y_{21} :

$$[12{,}66\,;\ 47{,}34]$$

1) La prévision ponctuelle y_{21}^p de y_{21}:
   L'intervalle de prévision de y_{21} est $y_{21}^p \pm t.\hat{\sigma}_{ep}$ alors
   $\left(y_{21}^p + t.\hat{\sigma}_{ep}\right) + \left(y_{21}^p - t.\hat{\sigma}_{ep}\right) = 2.y_{21}^p \Leftrightarrow y_{21}^p = \frac{(y_{21}^p + t.\hat{\sigma}_{ep}) + (y_{21}^p - t.\hat{\sigma}_{ep})}{2} = \frac{47{,}34+12{,}66}{2} = 30$
2) Déterminons $\hat{a}$ *et* $\hat{b}$ les estimateurs de a et b.
   On a:
   (1) $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \Leftrightarrow \hat{a} + \hat{b}\bar{x} = \bar{y}$ *et*
   (2) $y_{21}^p = \hat{a} + \hat{b}x_{21} \Leftrightarrow \hat{a} + \hat{b}x_{21} = y_{21}^p$
   On aura un système de 2 équations à 2 inconnus.
   $$\begin{cases}\hat{a} + 3\hat{b} = 25\\ \hat{a} + 2\hat{b} = 30\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\hat{a} = 40\\ \hat{b} = -5\end{cases}$$
3) l'écart type estimé $\hat{\sigma}_{ep}$ de l'erreur de prévision:
   on a:
   $$y_{21}^p - t.\hat{\sigma}_{ep} = 12{,}66 \Leftrightarrow \hat{\sigma}_{ep} = \frac{y_{21}^p - 12{,}66}{t} = \frac{30 - 12{,}66}{1{,}734} = 10$$
   $$\Leftrightarrow \hat{\sigma}_{ep}^2 = 100$$
4) l'écart type estimé $\hat{\sigma}_{\hat{b}}$ de $\hat{b}$.
   On a: $\hat{\sigma}_{\hat{b}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2}$, avec $\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{T-2} = \frac{1300{,}5}{18} = 72.25$ et

$$\hat{\sigma}_{ep}^2 = \hat{\sigma}^2\left(1 + \frac{1}{T} + \frac{(x_{21} - \bar{x})^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2}\right) \Leftrightarrow \sum(x_t - \bar{x})^2 = \frac{(x_{21} - \bar{x})^2}{\left(\frac{\hat{\sigma}_{ep}^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 - \frac{1}{T}\right)}$$

$$\sum(x_t-\bar{x})^2 = 2{,}993 \simeq 3$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{b}}^2 = \frac{72{,}25}{3} = 24{,}08 \Leftrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{b}} = \sqrt{24{,}08} = 4{,}907$$

5) l'intervalle de confiance de niveau 90 % pour b.

$$I(b) = \hat{b} \pm t.\ \hat{\sigma}_{\hat{b}} = [-5 - 1{,}734.4{,}907\,; -5 + 1{,}734.4{,}907] = [-13{,}518\,; 3{,}508]$$

Exercice 6:

Soit le modèle linéaire suivant :

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t\ , t = 1 \ldots T$$

On pose $m_{xx} = \sum(x_t - \bar{x})^2$, $m_{yy} = \sum(y_t - \bar{y})^2$ et $m_{xy} = \sum(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})$

1) Montrons que $R^2 = \hat{\beta}^2 \frac{m_{xx}}{m_{yy}}$, En effet,

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t \Leftrightarrow \hat{y} - \bar{y} = \hat{\beta}(x_t - \bar{x}) \Leftrightarrow (\hat{y} - \bar{y})^2 = \hat{\beta}^2(x_t - \bar{x})^2 \Leftrightarrow \sum(\hat{y} - \bar{y})^2$$

$$= \hat{\beta}^2 \sum(x_t - \bar{x})^2 = SCE$$

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{\hat{\beta}^2 \sum(x_t - \bar{x})^2}{\sum(y_t - \bar{y})^2} = \hat{\beta}^2 \frac{m_{xx}}{m_{yy}}$$

2) Sur la base de 22 observations on a trouvé :
$m_{yy} = 800$, $m_{xx} = 20$, $R^2 = 0{,}90$, $\bar{x} = 3$ et $\hat{\alpha} = 1$.

2-a) Construisons un intervalle de confiance de niveau 95% pour $\boldsymbol{\beta}$. En effet,

$$I(\beta) = \hat{\beta} \pm t.\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$$

$$\hat{\beta}^2 = R^2\frac{m_{yy}}{m_{xx}} \Leftrightarrow \sqrt{\hat{\beta}^2} = |\hat{\beta}| = \sqrt{R^2\frac{m_{yy}}{m_{xx}}} = \sum 0{,}9\frac{800}{20} = 6 \Leftrightarrow \hat{\beta} = \pm 6$$

Prenons le cas où $\hat{\beta} = 6$

$$t_{5\%}(20) = 2{,}086$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{T-2} = \frac{SCT(1-R^2)}{T-2} = \frac{m_{yy}(1-R^2)}{T-2} = \frac{800(1-0{,}9)}{22-2} = 4$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{m_{xx}} = \frac{4}{20} = 0{,}2 \Leftrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = \sqrt{0{,}2} = 0{,}447$$

$$I(\beta) = 6 \pm 2{,}086.0{,}447 = [5{,}067\,; 6{,}932]$$

2-b) Testons au seuil 5 %

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 6{,}5 \\ H_1 : \beta > 6{,}5 \end{cases}$$

$$t_c = \left|\frac{\hat{\beta} - 6{,}5}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}}\right| = \left|\frac{6 - 6{,}5}{0{,}447}\right| = 1{,}118 < t_{10\%}(20) = 1{,}724 \Rightarrow On\ accepte\ H_0$$

2-c) à la période t = 23 $x_{23} = 2$, alors l'intervalle de prévision de niveau 95% pour y_{23} sera comme suit:

$$y_{23}^p = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_{23} = 1 + 6 \times 2 = 7$$

$$\hat{\sigma}_{ep}^2 = \hat{\sigma}^2\left(1 + \frac{1}{T} + \frac{(x_{23} - \bar{x})^2}{m_{xx}}\right) = 4\left(1 + \frac{1}{22} + \frac{(2-3)^2}{20}\right) = 4{,}381$$

$$\hat{\sigma}_{ep} = \sqrt{4{,}381} = 2{,}093$$

$$I(y_{23}) = y_{23}^p \pm t.\hat{\sigma}_{ep} = [2{,}634 ; 11{,}365]$$

Exercice 7:

On considère le modèle suivant:

$$y_t = bx_t + u_t$$

1) l'estimateur $\hat{b}$ des MCO de b est:

$$\hat{b} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2}$$

2) En réalité le vrai modèle est $y_t = a + bx_t + e_t$ où e_t vérifie les hypothèses classique des MCO.

2-a) Montrons que $\hat{b}$ est biaisé. En effet,

$$\hat{b} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \frac{\sum x_t(a + bx_t + e_t)}{\sum x_t^2} = \frac{a\sum x_t}{\sum x_t^2} + b + \frac{\sum x_t e_t}{\sum x_t^2}$$

$$E(\hat{b}) = b + \frac{a\sum x_t}{\sum x_t^2}$$

$\hat{b}$ est biaisé du biais $= \frac{a\sum x_t}{\sum x_t^2}$

2-b) la condition nécessaire et suffisante pour que $\hat{b}$ soit sans biais est:

$$a\sum x_t = 0 \Leftrightarrow a = 0\ ou \sum x_t = 0$$

$$\sum x_t = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0 \Leftrightarrow le\ modèle\ est\ centré$$

IHEC-CARTHAGE **Année 2014/2015**

Série 2 d'Économétrie
3 Finance+HEC

__Exercice1__ :

Considérons le modèle suivant :

$Y = X\beta + U$

Où U est une perturbation vérifiant les hypothèses des MCO.
On donne les informations suivantes :

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 25 & -10 & 4 \\ -10 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad , \; (X'X)^{-1} = \frac{1}{250}\begin{pmatrix} 18 & 16 & -10 \\ 16 & 42 & 5 \\ -10 & 5 & 75 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} 220 \\ -75{,}6 \\ 31{,}04 \end{pmatrix} \text{ et } Y'Y = \sum y_t^2 = 1975{,}96$$

Où $X = [\, e\,, x_1\,, x_2\,]$ la matrice des variables exogènes x_1, x_2 et e avec e le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1 et

$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ Le vecteur des paramètres du modèle.

__Travail à faire__ :

1) Déterminer le nombre d'observation T ainsi que les moyennes empiriques des variables y , x_1 et x_2 ,
2) Calculer la SCT,
3) Déterminer $\widehat{\beta}$ l'estimateur des MCO de β,
4) Déterminer la SCR et la SCE,
5) Déterminer R^2 et $\bar{R}^2$,
6) Formuler les hypothèses et tester :
   a/ la significativité individuelle de β_1 et β_2 au risque 10 %,
   b/ Le modèle est –t- il globalement significatif au risque 5 %?,
7) Tester au risque 5 % :

$$\begin{cases} H_0: \beta_1 - 2\beta_2 = 4{,}5 \\ H_1: \beta_1 - 2\beta_2 \neq 4{,}5 \end{cases}$$

8) a/ Pour la période T+1, on donne $x_{1,T+1} = x_{2,T+1} = 1$. Déterminer un intervalle de prévision de niveau 95 % pour y_{T+1}.

b/ à la période T+1, on a observé $y_{T+1} = 15$. Que peut-on conclure ?

Exercice 2 :

Soit le modèle (1) suivant :

$$y_t = a + bx_t + cz_t + u_t$$

où $t = 1,2,\dots,20$ et u_t un terme d'erreur vérifiant les hypothèses classiques de la méthode des MCO.

On fournit les informations suivantes :

$$\sum(x_t - \bar{x})^2 = \sum(z_t - \bar{z})^2 = 6 \quad , \quad \sum(y - \bar{y})^2 = 3,415$$

$$\sum(x_t - \bar{x})(z_t - \bar{z}) = 4 \ , \sum(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y}) = 4,2 \ et \sum(z_t - \bar{z})(y_t - \bar{y}) = 3,3$$

1) Déterminer $\hat{b}$ et $\hat{c}$ les estimateurs des MCO de b et c respectivement.
2) Calculer la SCR et en déduire la valeur du coefficient de détermination R^2
3) On considère le modèle (2) :

$$y_t - x_t = a + c(z_t - x_t) + \varepsilon_t$$

   a) Déterminer $\hat{c}$ l'estimateur des MCO de **c**.
   b) Quelle est la contrainte qui nous fait passer du modèle (1) au modèle (2) ?
   c) On suppose que le coefficient de détermination R^2 est égal à 0,3. Tester au risque 5 % la pertinence de la contrainte retenue.

Exercice 3 :

On considère le modèle à 3 variables exogènes:

$$(1)\ y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \varepsilon_t \ , t = 1, \dots, 18$$

y : les importations d'un certain pays,
x_1 : la production intérieure brute,
x_2 : la formation des stocks,
x_3 : une variable auxiliaire.

Le modèle estimé s'écrit:

$$(2)\ \hat{y}_t = \underset{(1,27)}{-5,92} + \underset{(0,006)}{0,133}\, x_{t1} + \underset{(0,11)}{0,55}\, x_{t2} + \underset{(0,10)}{2,10}\, x_{t3}$$

NB : Les chiffres entre parenthèses sont les écarts types estimés des paramètres.

1) Les ε_t étant indépendants et normalement distribués, déterminer un intervalle de confiance au niveau $\alpha = 5\%$ pour β_1 et β_2.

2) Calculer les t de Student correspondant aux estimateurs de β_1 et β_2. Que peut-on conclure pour les variables exogènes correspondantes à ces paramètres?

3) On voudrait tester l'égalité à 0,13 et 0,30 des paramètres $\beta_1 et\ \beta_2$. Comment fait-on ? Préciser au niveau $\alpha = 5\%$ si ces valeurs sont acceptables pour β_1 et β_2.

10

Correction de la série 2 d'Économétrie

Exercice 1:

1)

$$(X'X) = \begin{pmatrix} T & \sum x_{t1} & \sum x_{t2} \\ \sum x_{t1} & \sum x_{t1}^2 & \sum x_{t1}x_{t2} \\ \sum x_{t2} & \sum x_{t1}x_{t2} & \sum x_{t2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -10 & 4 \\ -10 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum x_{t1}y_t \\ \sum x_{t2}y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ -75{,}6 \\ 31{,}04 \end{pmatrix}$$

$$T = 25,\ \overline{x_1} = \frac{1}{T}\sum x_{t1} = \frac{-10}{25} = -0{,}4\ ,\quad \overline{x_2} = \frac{1}{T}\sum x_{t2} = \frac{4}{25} = 0{,}16$$

$$\bar{y} = \frac{1}{T}\sum y_t = \frac{220}{25} = 8{,}8$$

2) $SCT = Y'Y - T\bar{y}^2 = 1975{,}96 - 25 \times 8{,}8^2 = 39{,}96$

3) $\widehat{\beta}$ l'estimateur des MCO de β est:

$$\widehat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'Y = \frac{1}{250}\begin{pmatrix} 18 & 16 & -10 \\ 16 & 42 & 5 \\ -10 & 5 & 75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 220 \\ -75{,}6 \\ 31{,}04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}76 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4) $SCE = \widehat{\beta}'X'Y - T\bar{y}^2 = (9.76,\ 2\ ,-1)\begin{pmatrix} 220 \\ -75{,}6 \\ 31{,}04 \end{pmatrix} - 25 \times 8.8^2 = 28{,}96$

$$SCR = SCT - SCE = 39{,}96 - 28{,}96 = 11$$

5) $R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{28{,}96}{39{,}96} = 0{,}725$ et $\bar{R}^2 = 1 - \frac{T-1}{T-K}(1 - R^2) = 0{,}7$

6) a/ la significativité individuelle de β_1 et β_2 au risque 10 %:

La matrice des variances et covariances des paramètres est $\Sigma_{\widehat{\beta}} = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$ or

La matrice estimée des variances et des covariances des estimateurs considérés est

$$\hat{\Sigma}_{(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)} = 10^{-4}\begin{pmatrix} 0,36 & -1,47 \\ -1,47 & 121,9 \end{pmatrix}$$

4) On prévoit une variation entre les instants T et θ :

- pour x_1 de 25 unités
- pour x_2 de 3 unités
- pour x_3 de 1 unité.

Quelle est la variation prévue de la variable endogène y ?

4) L'introduction d'une variable supplémentaire x_4 donne comme modèle estimé:

$$(3)\ \hat{y}_t = \underset{(1,38)}{-8,79} - \underset{(0,051)}{0,021\, x_{t1}} + \underset{(0,087)}{0,559\, x_{t2}} + \underset{(0,162)}{0,235\, x_{t3}} + \underset{(0,077)}{2,103\, x_{t4}}$$

Que peut-on dire de l'estimation de β_1 et β_2 par rapport au modèle estimé en (2) ? L'introduction d'une variable explicative est-elle toujours souhaitable ? Dans quel cas particulier l'estimation obtenue est-elle moins bonne ?

__Exercice 4 :__

Supposons qu'une entreprise, pour produire un bien, utilise du capital K et deux catégories de travail :
. du travail qualifié L_1
. du travail non qualifié L_2
et que la contrainte technologique peut être représentée par une fonction de production du type Cobb-Douglas :

$$Y_t = A L_{t1}^{b_1} L_{t2}^{b_2} K_t^{b_3} \exp(b_4 . t + u_t), \qquad t = 1, \dots, 30$$

où Y est la production et u une perturbation aléatoire.

1) Comment faire pour estimer les paramètres du modèle par les MCO ?
2) Quelle est l'interprétation économique des paramètres b_1, b_2, b_3 et b_4 ?
3) L'estimation par les MCO a donné les résultats suivants :

$$\underset{(0,1)}{\hat{b}_1 = 0,5} \qquad \underset{(0,2)}{\hat{b}_2 = 0,7} \qquad \underset{(0,05)}{\hat{b}_3 = 0,3} \qquad \underset{(0,001)}{\hat{b}_4 = 0,004}$$

NB: les chiffres entre parenthèse représentent les écarts-types estimés.
i/ les paramètres sont-ils significatives au seuil 5 % ?
ii/ construire un intervalle de confiance à 90 % pour b_3
iii/ tester au seuil 5 % $H_0: b_4 \geq 0$ *contre* $H_1: b_4 < 0$
iv/ en supposant que $Cov(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = 0$, tester au seuil 5 %
$H_0: b_1 = b_2$ *contre* $H_1: b_1 > b_2$.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{T-K} = \frac{11}{22} = 0,5$$

$$\Sigma_{\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_0} & \widehat{cov}(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1) & \widehat{cov}(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2) \\ \widehat{cov}(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_0) & \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} & \widehat{cov}(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) \\ \widehat{cov}(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_0) & \widehat{cov}(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1) & \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,036 & 0,032 & -0,02 \\ 0,032 & 0,084 & 0,01 \\ -0,02 & 0,01 & 0,15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| = \left|\frac{2}{\sqrt{0,084}}\right| = 6,9 > t_{10\%}(22) = 1,717 \Rightarrow \text{on rejette } H_0$$

$$\begin{cases} H_0: \beta_2 = 0 \\ H_1: \beta_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$I(\beta_2) = \hat{\beta}_2 \pm t.\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} = \left[-1 - 1,717 \times \sqrt{0,15}\,;\, -1 + 1,717 \times \sqrt{0,15}\right]$$
$$= [-1,664\,;\, -0,335]$$
$$0 \notin I(\beta_2) \Rightarrow \text{on rejette } H_0$$

b/ la significativité globale du modèle au risque 5 %?,

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$$
$$H_1: \beta_1\ et/ou \beta_2 \neq 0$$

$$\begin{cases} H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0 \\ H_1: \beta_1\ et/ou \beta_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$F_c = \frac{T-K}{k}.\frac{SCE}{SCR} = \frac{T-K}{k}.\frac{R^2}{1-R^2} = \frac{25-3}{2}.\frac{0,727}{1-0,725} = 28,96$$

$$F_c > F(2,22) = 3,44 \Rightarrow \text{on rejette } H_0$$

Le modèle est globalement significatif.

7) Testons au risque 5 % :

$$\begin{cases} H_0: \beta_1 - 2\beta_2 = 4,5 \\ H_1: \beta_1 - 2\beta_2 \neq 4,5 \end{cases}$$

$$t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_1 - 2\hat{\beta}_2 - 4,5}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} + 4\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_2} - 4\widehat{cov}(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2)}}\right| = \left|\frac{2+2-4,5}{\sqrt{0,084 + 4 \times 0,15 - 4 \times 0.01}}\right| = 0,623$$

$$t_c = 0,623 \leq t_{5\%}(22) = 2,074 \Rightarrow \text{on accepte } H_0$$

8) Pour la période T+1, on donne $x_{1,T+1} = x_{2,T+1} = 1$.

a/ Déterminons un intervalle de prévision de niveau 95 % pour y_{T+1}.

$$y^p_{T+1} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1,T+1} + \hat{\beta}_2 x_{2,T+1} = 10{,}76$$

$$\hat{\sigma}^2_{ep} = \hat{\sigma}^2(1 + x'_{T+1}(X'X)^{-1}x_{T+1}) = 0{,}814 \Leftrightarrow \hat{\sigma}_{ep} = \sqrt{0{,}814} = 0{,}902$$

$$t_{5\%}(22) = 2{,}074$$

$$I(y_{T+1}) = y^p_{T+1} \pm t.\hat{\sigma}_{ep} = [8{,}888 ; 12{,}631]$$

b/ à la période T+1, on a observé $y_{T+1} = 15$ or $15 \notin I(y_{T+1})$. On a fait une mauvaise prévision.

Exercice 2:

Soit le modèle (1) $y_t = a + bx_t + cz_t + u_t,\ t = 1, \ldots, 20$

Avec des données centrées la matrice X'X et le vecteur X'Y son comme suit:

$$(X'X) = \begin{pmatrix} \sum(x_t - \overline{x})^2 & \sum(x_t - \overline{x})(z_t - \overline{z}) \\ \sum(x_t - \overline{x})(z_t - \overline{z}) & \sum(z_t - \overline{z})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} \sum(x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y}) \\ \sum(z_t - \overline{z})(y_t - \overline{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}2 \\ 3{,}3 \end{pmatrix}$$

1) Déterminons $\hat{b}$ et $\hat{c}$ les estimateurs des MCO de b et c,

$$\begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{c} \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4{,}2 \\ 3{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}15 \end{pmatrix}$$

2) $$SCE = \hat{\beta}'X'Y = (0{,}6 ; 0{,}15)\begin{pmatrix} 4{,}2 \\ 3{,}3 \end{pmatrix} = 3{,}015$$

$$SCR = SCT - SCE = 3{,}415 - 3{,}015 = 0{,}4$$

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT} = 1 - \frac{0{,}4}{3{,}415} = 0{,}883$$

3) On considère le modèle (2) :

$$y_t - x_t = a + c(z_t - x_t) + \varepsilon_t$$

14

a) Déterminons $\widehat{c}$ l'estimateur des MCO de c

$$\widehat{c} = \frac{\sum([y_t - x_t] \times [z_t - x_t]) - T \times \overline{(y-x)}.\overline{(z-x)}}{\sum(z_t - x_t)^2 - T \times \overline{(z-x)}^2}$$

$$\widehat{c} = \frac{(\sum z_t y_t - T\overline{z}\overline{y}) - (\sum x_t y_t - T\overline{x}\overline{y}) - (\sum x_t z_t - T\overline{x}\overline{z}) + (\sum x_t^2 - T\overline{x}^2)}{(\sum x_t^2 - T\overline{x}^2) + (\sum z_t^2 - T\overline{z}^2) - 2(\sum x_t z_t - T\overline{x}\overline{z})}$$

$$\widehat{c} = \frac{\sum(z_t - \overline{z})(y_t - \overline{y}) - \sum(x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y}) - \sum(x_t - \overline{x})(z_t - \overline{z}) + \sum(x_t - \overline{x})^2}{\sum(x_t - \overline{x})^2 + \sum(z_t - \overline{z})^2 - 2\sum(x_t - \overline{x})(z_t - \overline{z})}$$

$$\widehat{c} = \frac{3,3 - 4,2 - 4 + 6}{6 + 6 - 2 \times 4} = 0,275$$

b) la contrainte qui nous fait passer du modèle (1) au modèle (2) est:

Le modèle (2) est:

$$y_t - x_t = a + c(z_t - x_t) + \varepsilon_t \Leftrightarrow y_t = a + (1-c)x_t + cz_t + \varepsilon_t$$

Alors pour passer du modèle (1) au modèle (2) en supposant que $b = (1-c)$

c) si le coefficient de détermination R^2 est égal à 0,3. Testons au risque 5 % la pertinence de la contrainte retenue. On applique le test de Chow. En effet,

$$\begin{cases} H_0 : b = (1-c) \\ H_1 : b \neq (1-c) \end{cases}$$

Sous H_0, $R_0^2 = 0{,}3$ et

$$SCT_0 = \sum(y_t - x_t)^2 - T(\overline{y} - \overline{x})^2 = (\sum y_t^2 - T\overline{y}^2) + (\sum x_t^2 - T\overline{x}^2) - 2(\sum x_t y_t - T\overline{x}\overline{y})$$

$$SCT_0 = \sum(y_t - \overline{y})^2 + \sum(x_t - \overline{x})^2 - 2\sum(x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y})$$

$$SCT_0 = 3,415 + 6 - 2 \times 4,2 = 1,015$$

$$SCR_0 = (1 - R_0^2)SCT_0 = (1 - 0,3) \times 1,015 = 0,7105$$

Sous H_1, $R_1^2 = 0{,}4$

Le test de Chow est alors:

$$F_c = \frac{(SCR_0 - SCR_1)/1}{SCR_1/(20-3)} = \frac{(0{,}7105 - 0{,}4)}{0{,}4} \times 17 = 13{,}196$$

$F_c = 13{,}196 > \mathcal{F}_{5\%}(1{,}17) = 4{,}45 \Rightarrow$ *on rejette* H_0 (la contrainte n'est pas pertinente).

Exercice 3:

On considère le modèle à 3 variables exogènes:

$$(1)\ y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \varepsilon_t\ ,\ t = 1, \ldots, 18$$

y : les importations d'un certain pays,

x_1 : la production intérieure brute,

x_2 : la formation des stocks,

x_3 : une variable auxiliaire.

Le modèle estimé s'écrit:

$$(2)\ \hat{y}_t = -5{,}92 + 0{,}133\ x_{t1} + 0{,}55\ x_{t2} + 2{,}10\ x_{t3}$$

(1,27) (0,006) (0,11) (0,10)

1) Les intervalles de confiance pour β_1 et β_2 au niveau de 95%

$$I(\beta_i) = \hat{\beta}_i \pm t.\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}$$

$$I(\beta_1) = 0{,}133 \pm 2{,}144 \times 0{,}006 = [0{,}12\ ;0{,}145]$$

$$I(\beta_2) = 0{,}55 \pm 2{,}144 \times 0{,}11 = [0{,}314\ ;0{,}785]$$

2)

$$\begin{cases} H_0: \beta_i = 0 \\ H_1: \beta_i \neq 0 \end{cases}$$

- Pour β_1 : $t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| = \left|\frac{0{,}133}{0{,}006}\right| = 22{,}166 > t_{5\%}(14) = 2{,}144 \Rightarrow$ on accepte H_1 (le PIB a un effet significatif sur les importations)
- Pour β_2 : $t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}}\right| = \left|\frac{0{,}55}{0{,}11}\right| = 5 > t_{5\%}(14) = 2{,}144 \Rightarrow$ on accepte H_1 (la formation des stocks est un facteur déterminant des importations)

3) Testons l'égalité à 0,13 et 0,30 des paramètres β_1 et β_2. En effet,

$$\begin{cases} H_0: \begin{pmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}13 \\ 0{,}30\end{pmatrix} \\ H_1: \begin{pmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0{,}13 \\ 0{,}30\end{pmatrix} \end{cases}$$

$$F_c = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0{,}13 \\ 0{,}30\end{pmatrix}\right)' \hat{\Sigma}^{-1}_{(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)} \left(\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0{,}13 \\ 0{,}30\end{pmatrix}\right) = 3{,}092$$

16

$$F_c = 3{,}092 < \mathcal{F}_{5\%}(2,14) = 3{,}74 \Rightarrow \text{on accepte } H_0$$

4) On prévoit une variation entre les instants T et θ de:
$\Delta x_1 = 25, \Delta x_2 = 3$ et $\Delta x_3 = 1$. Alors
$$\Delta y = \hat{\beta}_1 \Delta x_1 + \hat{\beta}_2 \Delta x_2 + \hat{\beta}_3 \Delta x_3 = 0{,}133 \times 25 + 0{,}55 \times 3 + 2{,}11 \times 1 = 7{,}075$$

5) L'introduction d'une variable supplémentaire x_4 donne comme modèle estimé:
$$(3)\ \hat{y}_t = -8{,}79 - 0{,}021\, x_{t1} + 0{,}559\, x_{t2} + 0{,}235\, x_{t3} + 2{,}103\, x_{t4}$$
(1,38) (0,051) (0,087) (0,162) (0,077)

L'introduction de la variable exogène x_4 au modèle a un effet négatif sur la significativité de la variable x_1 (x_1 n'est plus significatif $\left(t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| = \left|\frac{0{,}021}{0{,}051}\right| = 0{,}4115 < t_{5\%}(14) = 2{,}144\right)$. Par contre l(introduction de cette variable n'a pas d'effet sur la pertinence de la variable x_2.

L'introduction d'une variable explicative est toujours souhaitable car, théoriquement, il peut porter une part de l'explication de la variabilité de la variable endogène y. Mais si cette variable ajoutée a une certain dépendance linéaire avec une des variables exogènes déjà existantes dans le modèle, on aura un problème de colinéarité et le nouveau modèle devient moins bon que l'ancien.

Exercice 4:

Supposons qu'une entreprise, pour produire un bien Y, utilise du capital K et deux catégories de travail (du travail qualifié L_1 et du travail non qualifié L_2).La contrainte technologique peut être représentée par une fonction de production du type Cobb-Douglas :

$$Y_t = A L_{t1}^{b_1} L_{t2}^{b_2} K_t^{b_3} \exp(b_4 . t + u_t), \qquad t = 1, \dots, 30$$

1) Pour estimer les paramètres du modèle par les MCO on doit linéariser le modèle par l'introduction de l'opérateur Logarithmique. Le modèle devient:
$$Log(Y_t) = Log(A) + b_1 Log(L_{t1}) + b_2 Log(L_{t2}) + b_3 Log(K_t) + b_4 . t + u_t$$

2) les interprétations économiques des paramètres b_1, b_2, b_3 et b_4 sont:

* $b_1 = \frac{\Delta Log(Y)}{\Delta Log(L_1)} = \frac{\Delta Y / Y}{\Delta L_1 / L_1} = e_{Y/L_1}$ l'élasticité de la production du bien Y par rapport au facteur travail qualifié. Le signe attendu est positif.

(17)

* $b_2 = \frac{\Delta Log(Y)}{\Delta Log(L_2)} = \frac{\Delta Y/_Y}{\Delta L_2/_{L_2}} = e_{Y/_{L_2}}$ l'élasticité de la production du bien Y par rapport au facteur travail non qualifié. Le signe attendu est positif.

* $b_3 = \frac{\Delta Log(Y)}{\Delta Log(K)} = \frac{\Delta Y/_Y}{\Delta K/_K} = e_{Y/_K}$ l'élasticité de la production du bien Y par rapport au facteur travail capital. Le signe attendu est positif.

* $b_4 = \frac{\Delta Log(Y)}{\Delta t} = \frac{\Delta Y/_Y}{\Delta t} = \frac{\Delta Y}{Y}$ le taux de croissance de la production du bien Y. le signe peu être positif, négatif ou nul.

3) L'estimation par les MCO a donné les résultats suivants :

$$\underset{(0{,}1)}{\hat{b}_1 = 0{,}5} \quad \underset{(0{,}2)}{\hat{b}_2 = 0{,}7} \quad \underset{(0{,}05)}{\hat{b}_3 = 0{,}3} \quad \underset{(0{,}001)}{\hat{b}_4 = 0{,}004}$$

i/ les paramètres sont-ils significatives au seuil 5 % ? Revient à faire les tests suivants:

$$\begin{cases} H_0: b_i = 0 \\ H_1: b_i \neq 0 \end{cases} \quad i = 1, \ldots, 4$$

- Pour b_1 : $t_c = \left|\frac{\hat{b}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_1}}\right| = \left|\frac{0{,}5}{0{,}1}\right| = 5 > t_{5\%}(25) = 2{,}059 \Rightarrow$ on accepte H_1 (le travail qualifié a un effet significatif sur la production)
- Pour b_2 : $t_c = \left|\frac{\hat{b}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_2}}\right| = \left|\frac{0{,}7}{0{,}2}\right| = 3{,}5 > t_{5\%}(25) = 2{,}059 \Rightarrow$ on accepte H_1 (le travail non qualifié a un effet déterminant sur la production)
- Pour b_3 : $t_c = \left|\frac{\hat{b}_3}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_3}}\right| = \left|\frac{0{,}3}{0{,}05}\right| = 6 > t_{5\%}(25) = 2{,}059 \Rightarrow$ on accepte H_1 (le capital a un effet pertinent sur la production)
- Pour b_4 : $t_c = \left|\frac{\hat{b}_4}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_4}}\right| = \left|\frac{0{,}004}{0{,}001}\right| = 4 > t_{5\%}(25) = 2{,}059 \Rightarrow$ on accepte H_1 (il y a une évolution croissante significative de la production du bien Y)

ii/ l'intervalle de confiance à 90 % pour b_3 est

$$I(b_3) = \hat{b}_3 \pm t.\hat{\sigma}_{\hat{b}_3} = [0{,}3 - 1{,}708 \times 0{,}05 \,;\, 0{,}3 + 1{,}708 \times 0{,}05]$$
$$= [0{,}214 \,;\, 0{,}385]$$

iii/ testons au seuil 5 % $H_0: b_4 \geq 0$ *contre* $H_1: b_4 < 0$. En effet,

$$t_c = \left|\frac{\hat{b}_4}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_4}}\right| = \left|\frac{0{,}004}{0{,}001}\right| = 4 > t_{10\%}(25) = 1{,}708 \Rightarrow \text{on accepte } H_1$$

iv/ en supposant que $Cov(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = 0$, testons au seuil 5 %

$H_0 : b_1 = b_2 \ contre \ H_1 : b_1 > b_2$. En effet,

$$\begin{cases} H_0 : b_1 = b_2 \\ H_1 : b_i \neq b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : b_1 - b_2 = 0 \\ H_1 : b_i - b_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$t_c = \left| \frac{\hat{b}_1 - \hat{b}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{b}_1} + \hat{\sigma}^2_{\hat{b}_2}}} \right| = \left| \frac{0{,}5 - 0{,}7}{\sqrt{0{,}1^2 + 0{,}2^2}} \right| = 0{,}894 < t_{5\%}(25) = 2{,}059 \Rightarrow \text{on accepte } H_0$$

TD 3 d'économétrie
3ième année Finance+HEC

Exercice : 1

Soit un modèle à deux variables explicatives dont les matrices $X'X$ et $X'Y$ sont calculées à partir d'un échantillon d'observation de variables centrées.

$$X'X = \begin{pmatrix} 200 & 150 \\ 150 & 113 \end{pmatrix}, X'Y = \begin{pmatrix} 350 \\ 263 \end{pmatrix}, R^2 = 0,9 \quad et\ T = 20$$

L'ajout d'une observation a modifié les résultats de la manière suivante :

$$X'X = \begin{pmatrix} 199 & 149 \\ 149 & 112 \end{pmatrix} \text{ et } X'Y = \begin{pmatrix} 347.5 \\ 261.5 \end{pmatrix}$$

1) Calculer les coefficients de régression du modèle dans les deux cas.
2) calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x_1 et x_2.
3) commenter les résultats (utiliser les tests de Klein).

Exercice 2

Soit le modèle :

$$y_i = a_0 + a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + i$$

avec:

$$Var(u) = \Sigma_u = \begin{pmatrix} 2\,0\,0\,0 \ldots 0 \\ 0\,4\,0\,0 \ldots 0 \\ 0\,0\,6\,0 \ldots 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ 0\,0\,0\,0 \ldots 50 \end{pmatrix}$$

1) Les variables u_t sont-elles auto corrélées ?
2) Les u_t sont-elles homoscédastiques ? Si elles ne le sont pas, quelle transformation doit être réalisée pour qu'elles deviennent homoscédastiques ?

Exercice 3

On considère 30 entreprises d'un certain secteur industrielle et on désir étudier le salaire moyen de chacune Y en fonction de son effectif X. Les observations simplifiées ont été regroupées dans le tableau suivant:

Salaire mensuel moyen de chaque entreprise : Y						Effectif salarié : X
75.6	75.6	77.4	78.3	80.1	81	100
80.1	81.9	83.7	83.7	84.6	86.4	200
85.5	88.2	89.1	92.7	92.7	94.5	300
92.7	95.4	980.1	101.7	103.5	105.3	400
104.4	106.2	·108.9	112.5	114.3	117.9	500

1) La régression de y par rapport à x est :

$$\hat{y}_i = \underset{(0.0052)}{67.965} + \underset{(1.693)}{0.08145} x_i \qquad R^2 = 0.9$$

(.) : Les écarts types estimés.

2) On désir tester l'hétéroscédasticité des perturbations. Pour cela on effectuera deux régressions séparées, l'une pour les 12 premières observations de x, l'autre pour les 12 dernières (les valeurs de x étant rangées par ordre croissant), en omettant les 6 intermédiaires. Soient respectivement SCR_1 et SCR_2 les sommes des carrés des résidus de ces 2 régressions. On trouve **$SCR_1 = 49.14$ et $SCR_2 = 250.695$.**
Quelle est la loi suivie par SCR_2/SCR_1 en cas d'homoscédasticité et de normalité ?
En déduire un test de l'hétéroscédasticité (test de Goldfeld-Quant).
Que donne ce test pour l'échantillon observé ?

3) Dans les cas de présence d'hétéroscédasticité, et en supposant que la variance des erreurs est proportionnelle à X^2, transformé le modèle pour obtenir des estimateurs B.L.U.E.

Exercice 4

On considère le modèle linéaire suivant :

$$y_t = a + bx_t + u_t \quad \text{où} \quad u_t = 0.5u_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec ε_t un bruit blanc.
Pour les périodes t = 1,2,...,6 on dispose des données suivantes:

y_t	0.4	1.2	3.6	3.8	6.9	9.45
x_t	1.2	1.6	2.8	4.4	6.2	8.1

Estimer les paramètres a et b.

Exercice 5 :

Soit le modèle de la demande de monnaie suivant :

$$y_t = a + b\, i_t + c\, R_t + d\, S_t + u_t$$

Où y = la demande de la monnaie,
i = le taux d'intérêt,
R = le revenu national,
S = l'épargne.

L'estimation par les MCO sur une période de 38 ans allant de 1970 à 2007 a fourni les résultats suivants :

$$\hat{y}_t = \underset{(0,009)}{0,003} - \underset{(0,112)}{0,261}\, i_t + \underset{(0,101)}{0,530}\, R_t + \underset{(0,102)}{0,367}\, S_t$$

$R^2 = 0,579$, $DW = 1,72$ et $SCT = 0,1903$

NB: les chiffres entre parenthèses représentent les écarts types estimés des coefficients.

1) Donner une interprétation économique des paramètres attachés aux variables i, R et S.
2) La variable explicative S est-elle pertinente au risque 5 % ?
3) Y-t- il auto-corrélation des erreurs au risque 5 % ?
4) L'estimation du modèle sur les périodes 1970-1989 et 1990-2007 a fourni les résultats suivants :

Période 1970-1989

$$\hat{y}_t = 0,008 - 0,180\, i_t + 0,517\, R_t + 0,281\, S_t$$

$R^2_1 = 0,697$ et $SCT_1 = 0,0927$

Période 1990-2007

$$\hat{y}_t = 0,013 - 0,419\, i_t + 0,936\, R_t + 0,587\, S_t$$

$R^2_2 = 0,479$ et $SCT_2 = 0,0805$

Y-t-il stabilité structurelle (homogénéité) de la relation

Problème :

NB : On effectuera tous les tests au seuil 5% et on prendra soin de préciser dans chaque cas l'hypothèse nulle à tester ainsi que son alternative.

La demande d'un certain bien A est supposée déterminé par le modèle suivant:

$$Log(Q_t) = a + \beta_1 Log(P_{t1}) + \beta_2 Log(P_{t2}) + \beta_3 Log(P_{t3}) + \beta_4 Log(R_t) + \varepsilon_t$$

Où Q désignera la quantité du bien A, P_1 le prix du bien A, P_2 le prix du bien B, P_3 le prix du bien C, R le revenu et ε un terme d'erreur vérifiant les hypothèses classiques de la méthode des MCO.

On suppose que les biens A et B sont substituables et les biens A et C sont complémentaires.

Sur la base de 30 observations, l'estimation du modèle a fourni les résultats suivants:

$$\widehat{Log\,Q_t} = \underset{(1,5)}{-4,8} - \underset{(0,21)}{0,56}\, Log\, P_{t1} + \underset{(0,14)}{0,21}\, Log\, P_{t2} - \underset{(0,17)}{0,007}\, Log\, P_{t3} + \underset{(0,22)}{1,43}\, Log\, R_t$$

Les chiffres entre parenthèses désignent les écarts-types estimés.

$R^2 = 0,68$, $SCR = 3,9$ et $DW = 1,85$

Questions :

Partie 1:

1) Donner la signification économique des paramètres β.
2) Commenter la valeur de $\hat{\beta}_1 = -0,56$.
3) P_2 est-elle une variable pertinente?
4) P_3 est-elle une variable significative?
5)

5-a) Tester H_0: $\beta_1 \leq -1$ contre H_1: $\beta_1 > -1$

5-b) Interpréter économiquement votre conclusion

6) Le bien A est-il un bien de luxe?
7) La demande est-elle insensible aux différents prix et au revenu?
8) On suppose que l'hypothèse: H_{01}: $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 0$ est vraie

8-a) Écrire le modèle en fonction des paramètres a, β_1, β_2 et β_4

8-b) Que peut-on dire de la demande si on double **simultanément** les prix et le revenu?

8-c) Sachant que la $SCR = 4,4$ du modèle estimé sous H_{01}, peut-on accepter l'hypothèse H_{01}?

9)

9-a) Que représente $\left(\frac{P_{t1}Q_t}{R_t}\right)$?

9-b) Écrire le modèle en considérant que l'hypothèse H_{02}: $\begin{cases}\beta_1 = -1\\ \beta_2 = \beta_3 = 0\\ \beta_4 = 1\end{cases}$ est vraie

9-c) Interpréter économiquement l'hypothèse H_{02}

9-d) Sachant que la $SCR = 5,9$ du modèle estimé sous H_{02}, peut-on accepter l'hypothèse H_{02}?

Partie 2:

10) Y-t-il auto corrélation des erreurs d'ordre 1 ?
11) On désir tester l'hétéroscédasticité. Pour cela, on a effectué deux régressions par les MCO l'une sur les 12 premières observations et l'autre sur les 12 dernières On a trouvé les résultats suivants :
    La SCR de la première régression est égale à $SCR_1 = 1,65$
    La SCR de la deuxième régression est égale à $SCR_2 = 2,1$
    Quelle est votre conclusion ?
12) Peut-on accepter l'estimation du modèle par la méthode des MCO?
13) On prévoit une variation entre les instants T et θ avec $(\theta > T)$ de :
    - pour $Log(P_1)$ est 2 unités
    - pour $Log(P_2)$ est 3 unités
    - pour $Log(P_3)$ est 1 unité
    - pour $Log(R)$ est 20 unités.

Quelle est la variation prévue de l'endogène $Log(Q)$?

(21)

Correction de la série 3 d'Économétrie

Exercice 1:

Soit un modèle à deux variables explicatives dont les matrices $X'X$ et $X'Y$ sont calculées à partir d'un échantillon d'observation de variables centrées.

$$X'X = \begin{pmatrix} 200 & 150 \\ 150 & 113 \end{pmatrix}, X'Y = \begin{pmatrix} 350 \\ 263 \end{pmatrix}, R^2 = 0,9 \quad et\, T = 20$$

L'ajout d'une observation a modifié les résultats de la manière suivante :

$$X'X = \begin{pmatrix} 199 & 149 \\ 149 & 112 \end{pmatrix} \text{ et } X'Y = \begin{pmatrix} 347.5 \\ 261.5 \end{pmatrix}$$

1) les coefficients de régression du modèle dans les deux cas.
   a) Lorsque T=20:
   $$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} 200 & 150 \\ 150 & 113 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 350 \\ 263 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   b) Lorsque T=21:
   $$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} 199 & 149 \\ 149 & 112 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 347.5 \\ 261.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$
2) le coefficient de corrélation linéaire entre x_1 et x_2.

$$\rho_{x_1,x_2} = \frac{cov(x_1,x_2)}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} = \frac{\frac{1}{T}\sum(x_{t1}-\bar{x}_1)(x_{t2}-\bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{1}{T}\sum(x_{t1}-\bar{x}_1)^2\frac{1}{T}\sum(x_{t2}-\bar{x}_2)^2}}$$
$$= \frac{\sum(x_{t1}-\bar{x}_1)(x_{t2}-\bar{x}_2)}{\sqrt{\sum(x_{t1}-\bar{x}_1)^2\sum(x_{t2}-\bar{x}_2)^2}} = \frac{150}{\sqrt{200\times 113}} = 0.9977$$

3) **Test de Klein:**

$\rho^2_{x_1,x_2} = 0.9977^2 = 0.9955 > R^2 = 0.9 \Rightarrow$ Présence d'un problème de multi colinéarité.

Nous constatons que suite à ce problème de multi colinéarité (dépendance linéaire entre les deux variables exogènes) l'augmentation de la taille de l'échantillon d'une seule observation a changé complètement les valeurs des paramètres estimés. En effet, $\hat{\beta}_1$ a passé de la valeur 1 (qui est positive) à une valeur négative (-0.5). Alors que la valeur de $\hat{\beta}_2$ est triplé (elle a passé de 1 à 3).

À cause de la multi colinéarité une simple modification au niveau de la valeur d'une observation peut aussi changer les valeurs de ces paramètres. En plus la significativité des paramètres peut être remise en cause.

En présence de ce problème, avant de régresser le modèle, il faut faire les corrections nécessaires

Exercice 2:

Soit le modèle :

$$y_i = a_0 + a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + u_i$$

avec:

$$Var(u) = \Sigma_u = \begin{pmatrix} 2\,0\,0\,0 \ldots 0 \\ 0\,4\,0\,0 \ldots 0 \\ 0\,0\,6\,0 \ldots 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ 0\,0\,0\,0 \ldots 50 \end{pmatrix}$$

1) Les variables u_i sont-elles auto corrélées ?

Les u_i ne sont pas auto corrélées car les covariances deux à deux sont nulles: $Cov\left(u_i, u_j\right) = 0 \; pour \; i \neq j$

2) Les u_i sont-elles homoscédastiques ?

$$Var(u) = \Sigma_u = 2\begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0 \ldots 0 \\ 0\,2\,0\,0 \ldots 0 \\ 0\,0\,3\,0 \ldots 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ 0\,0\,0\,0 \ldots 25 \end{pmatrix}$$

$$Var(u_i) = 2 \times i \; pour \;\; i = 1, \ldots, 25$$

La variance du terme d'erreur change d'une observation à une autre. Alors le modèle est hétéroscédastique.

La transformation nécessaire pour que le modèle devient homoscédastique est de diviser chaque terme du modèle par $\sqrt{i}$ .En effet, le modèle transformé est:

$$\frac{y_i}{\sqrt{i}} = a_0 \times \frac{1}{\sqrt{i}} + a_1 \frac{x_{i1}}{\sqrt{i}} + a_2 \frac{x_{i2}}{\sqrt{i}} + \frac{u_i}{\sqrt{i}}$$

Exercice 3:

1) $\frac{SCR_2}{SCR_1} = \frac{\frac{SCR_2}{\sigma^2}}{\frac{SCR_1}{\sigma^2}} = \frac{\frac{SCR_2}{\sigma^2}/_{N_2-K}}{\frac{SCR_1}{\sigma^2}/_{N_1-K}} \rightsquigarrow \mathcal{F}(N_2 - K, N_1 - K) = \mathcal{F}(10,10)$

Test de Goldfeld-Quant:

23

$$\begin{cases} H_0 : Homoscédasticité \\ H_1 : hétéroscédasticité \end{cases}$$

$$F_c = \frac{SCR_2}{SCR_1} = \frac{250.695}{49.14} = 5.101 > \mathcal{F}_{5\%}(10,10) = 2.98$$

$$\Rightarrow \textit{le modèle est hétéroscédastique}$$

2) Si on suppose que la variance de l'erreur est fonction de x^2 : $V(u_i) = \sigma^2.x^2$, la transformation du modèle se fait par la division de chaque terme du modèle par $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Le modèle transformé est:

$$\frac{y_i}{x_i} = a \times \frac{1}{x_i} + b \times \frac{x_i}{x_i} + \frac{u_i}{x_i} \Leftrightarrow \frac{y_i}{x_i} = a \times \frac{1}{x_i} + b + \frac{u_i}{x_i}$$

Exercice 4:

On considère le modèle linéaire suivant :

$$y_t = a + bx_t + u_t \quad \text{où} \quad u_t = 0.5u_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec ε_t un bruit blanc.

Pour les périodes t = 1,2,...,6 on dispose des données suivantes:

y_t	0.4	1.2	3.6	3.8	6.9	9.45
x_t	1.2	1.6	2.8	4.4	6.2	8.1

Estimons les paramètres a et b. En effet,

y_t	x_t	$\Delta y_t = (y_t - 0.5y_{t-1})$	$\Delta x_t = (x_t - 0.5x_{t-1})$	$\Delta^* y_t . \Delta^* x_t$	$\Delta^* x_t^2$
0.4	1.2	*	*	*	*
1.2	1.6	1	1	4.8	4
3.6	2.8	3	2	0.4	1
3.8	4.4	2	3	0	0
6.9	6.2	5	4	1.6	1
9.45	8.1	6	5	5.2	4
Total		17	15	12	10

Avec

$$\overline{\Delta y} = \frac{17}{5} = 3.4 \quad et \quad \overline{\Delta x} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\Delta^* y_t . \Delta^* x_t = (\Delta y_t - \overline{\Delta y})(\Delta x_t - \overline{\Delta x})$$

$$\Delta^* x_t^2 = (\Delta x_t - \overline{\Delta x})^2$$

$$\hat{b} = \frac{\sum \Delta^* y_t . \Delta^* x_t}{\sum \Delta^* x_t^2} = \frac{12}{10} = 1.2$$

$$\hat{a} = \overline{\Delta y} - \hat{b}\,\overline{\Delta x} = 3.4 - 1.2 \times 3 = 7$$

Exercice 5:

Soit le modèle de la demande de monnaie suivant :

$$y_t = a + b\, i_t + c\, R_t + d\, S_t + u_t$$

Où y = la demande de la monnaie,

i = le taux d'intérêt,

R = le revenu national,

S = l'épargne.

L'estimation par les MCO sur une période de **38** ans allant de 1970 à 2007 a fourni les résultats suivants :

$$\hat{y}_t = 0{,}003 \quad - 0{,}261\, i_t + 0{,}530\, R_t + 0{,}367\, S_t$$

$$(0{,}009) \quad (0{,}112) \quad (0{,}101) \quad (0{,}102)$$

$R^2 = 0{,}579$, $DW = 1{,}72$ et $SCT = 0{,}1903$

1) Interprétation économique des paramètres des variables exogènes:
   - $\hat{b} = \frac{\Delta y}{\Delta i}$ est la variation marginale de la demande monétaire suite à la variation du taux d'intérêt d'une unité. Le signe attendu est négatif car si le taux d'intérêt augmente la demande de la monnaie diminue.
   - $\hat{c} = \frac{\Delta y}{\Delta R}$ est la variation marginale de la demande de la monnaie suite à la variation de revenu d'une unité. Le signe attendu est positif car si le revenu augmente la demande de la monnaie augmente.

25

- $\hat{d} = \frac{\Delta y}{\Delta S}$ est la variation marginale de la demande de la monnaie par rapport à la variation de l'épargne d'une unité. Le signe attendu est positif: La demande de la monnaie augmente si l'épargne augmente.

2) Testons la pertinence de l'épargne revient à faire le test suivant:

$$\begin{cases} H_0: d = 0 \\ H_1: d \neq 0 \end{cases}$$

$$t_c = \left|\frac{\hat{d}}{\hat{\sigma}_{\hat{d}}}\right| = \left|\frac{0.367}{0.120}\right| = 3.058 > t_{5\%}(34) = 2.032 \Rightarrow on\ rejette\ H_0$$

L'épargne est une variable pertinente.

3) Test de l'auto-corrélation des erreurs au risque 5 %.

$$\begin{cases} H_0: \rho = 0 \ \ independance\ des\ erreurs \\ H_1: \rho \neq 0 \ \ autocorrélation\ des\ erreurs \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & d_1 & d_2 & 0 & 1-d_2 & 1-d_1 & 4 \end{array}$$
$$I---!---!---!---!---!---I$$

Pour T=38 et k= 3, on a:

$$d_1 = 1{,}32 \ \ et\ d_2 = 1{,}66$$

$d_2 < DW = 1{,}72 < 4 - d_2 \Longrightarrow on\ accepte\ H_0$ (Absence d'auto corrélation des erreurs)

4) Test d'homogénéité:

$$\begin{cases} H_0: SCR_0 = SCR_1 + SCR_2 \\ H_1: SCR_0 \neq SCR_1 + SCR_2 \end{cases}$$

$$F_c = \frac{(SCR_0 - (SCR_1 + SCR_2))/K}{(SCR_1 + SCR_2)/(T - 2K)} \rightsquigarrow \mathcal{F}(K, T - 2K)$$

$$SCR_0 = (1 - R_0^2)SCT_0 = (1 - 0.579) \times 0.1903 = 0.0801$$
$$SCR_1 = (1 - R_1^2)SCT_1 = (1 - 0.697) \times 0.0927 = 0.028$$
$$SCR_2 = (1 - R_2^2)SCT_2 = (1 - 0.479) \times 0.0805 = 0.0419$$

$$F_c = \frac{(0.0801-(0.028+0.0419))/4}{(0.028+0.0419)/(30)} = 1.0944 < \mathcal{F}_{5\%}(4{,}30) = 2.69 \Longrightarrow$$

$on\ accepte\ H_0$ (Il y a stabilité structurelle (homogénéité) de la relation)

Problème:

La demande d'un certain bien A est supposée déterminé par le modèle suivant:

$$Log(Q_t) = a + \beta_1 Log(P_{t1}) + \beta_2 Log(P_{t2}) + \beta_3 Log(P_{t3}) + \beta_4 Log(R_t) + \varepsilon_t$$

Où Q désignera la quantité du bien A, P_1 le prix du bien A, P_2 le prix du bien B, P_3 le prix du bien C, R le revenu et ε un terme d'erreur vérifiant les hypothèses classiques de la méthode des MCO.

On a supposé que les biens A et B sont complémentaires et les biens A et C sont substituables.

Sur la base de **30** observations, l'estimation du modèle a fourni les résultats suivants:

$$\widehat{Log\,Q_t} = \underset{(1,5)}{-4{,}8} - \underset{(0,21)}{0{,}56}\, Log\, P_{t1} - \underset{(0,14)}{0{,}21}\, Log\, P_{t2} + \underset{(0,17)}{0{,}007}\, Log\, P_{t3} + \underset{(0,22)}{1{,}43}\, Log\, R_t$$

Les chiffres entre parenthèses désignent les écarts-types estimés.

$R^2 = 0{,}68$, $SCR = 3{,}9$ et $DW = 1{,}85$

Réponses :

Partie I:

1) La signification économique des paramètres $\boldsymbol{\beta}$:

- $\beta_1 = \frac{\Delta Log(Q)}{\Delta Log(P_1)} = \frac{\Delta Q}{Q} / \frac{\Delta P_1}{P_1}$ est la variation relative (en %) de la quantité demandée du bien A par rapport à la variation relative (en %) de son prix. C'est l'élasticité de la demande du bien A par rapport à son prix. (le signe attendu est négatif).
- $\beta_2 = \frac{\Delta Log(Q)}{\Delta Log(P_2)} = \frac{\Delta Q}{Q} / \frac{\Delta P_2}{P_2}$ est la variation relative (en %) de la quantité demandée du bien A par rapport à la variation relative (en %) du prix de bien B. C'est l'élasticité de la demande du bien A par rapport au prix de bien B. (le signe attendu est négatif puisque les deux biens A et B sont complémentaires).
- $\beta_3 = \frac{\Delta Log(Q)}{\Delta Log(P_3)} = \frac{\Delta Q}{Q} / \frac{\Delta P_3}{P_3}$ est la variation relative (en %) de la quantité demandée du bien A par rapport à la variation relative (en %) du prix de

bien C. C'est l'élasticité de la demande du bien A par rapport au prix de bien C. (le signe attendu est positif puisque les deux biens A et B sont substituables).

- $\beta_4 = \frac{\Delta Log(Q)}{\Delta Log(R)} = \frac{\Delta Q}{Q} / \frac{\Delta R}{R}$ est la variation relative (en %) de la quantité demandée du bien A par rapport à la variation relative (en %) du revenu. C'est l'élasticité revenu du bien A. (le signe attendu est positif).

2)

$\hat{\beta}_1 = -0,56$ Signifie que l'augmentation (diminution) du prix de bien A de 1% entraine une diminution (augmentation) de la quantité demandée de ce bien de 0,56%.

3)

$$\begin{cases} H_0 : \beta_2 = 0 \\ H_1 : \beta_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}}\right| = \left|\frac{-0,21}{0,14}\right| = 1,5$$

$$t_{\alpha=5\%}(25) = 2,060$$

$t_c \leq t_{\alpha=5\%}(25) \Rightarrow$ On accepte H_0 (P_2 n'est pas une variable pertinente)

4)

$$\begin{cases} H_0 : \beta_3 = 0 \\ H_1 : \beta_3 \neq 0 \end{cases}$$

$$t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_3}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_3}}\right| = \left|\frac{0,07}{0,17}\right| = 0,411$$

$$t_{\alpha=5\%}(25) = 2,060$$

$t_c \leq t_{\alpha=5\%}(25) \Rightarrow$ On accepte H_0 (P_3 n'est pas une variable significative)

5)

5-a)

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 \leq -1 \\ H_1 : \beta_1 > -1 \end{cases}$$

$t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_1 + 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| = \left|\frac{-0,56+1}{0,21}\right| = 2,095 > t_\alpha(25) = 1,708 \Rightarrow$ On accepte H_1 ($\beta_1 > -1$)

5-b)

$(\beta_1 > -1) \Longrightarrow$ Une augmentation du prix du bien A de 1% entraine une diminution de la quantité demandée de ce bien de plus que 1%. La demande est élastique.

6)

Vérifions si le bien A est un bien de luxe ou non.

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 \leq 0 \\ H_1 : \beta_1 > 0 \end{cases}$$

$t_c = \left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| = \left|\frac{-0.56}{0.21}\right| = 2.666 \leq t_{10\%}(25) = 1,708 \Longrightarrow$ on accepte H_0 (le bien A n'est pas un bien de luxe).

7)

Significativité globale du modèle :

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \\ H_1 = \overline{H}_0 \end{cases}$$

$$F_c = \frac{R^2}{1-R^2} \times \frac{T-K}{k} = \left(\frac{0,68}{1-0,68}\right) \times \left(\frac{30-5}{4}\right) = 13,281$$

$$\mathcal{F}_{\alpha=5\%}(4,25) = 2,76$$

$F_c > \mathcal{F}_{\alpha=5\%}(4,25) \Longrightarrow$ On accepte H_1 . Le modèle est globalement significatif (le modèle n'est pas insensible aux prix et au revenu).

8) On suppose que l'hypothèse $H_{01} : \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 0$ est vraie.

8-a)

l'écriture du modèle en fonction de a, β_1, β_2 *et* β_4.

$$Log(Q_t) = a + \beta_1 Log(P_{t1}) + \beta_2 Log(P_{t2}) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_4) Log(P_{t3}) + \beta_4 Log(R_t) + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow Log(Q_t) = a + \beta_1 Log\left(\frac{P_{t1}}{P_{t3}}\right) + \beta_2 Log\left(\frac{P_{t2}}{P_{t3}}\right) + \beta_4 Log\left(\frac{R_t}{P_{t3}}\right) + \varepsilon_t$$

8-b)

Si on double simultanément les prix et le revenu, la demande du bien A ne va pas changer. En effet,

$$Log(Q_t) = a + \beta_1 Log\left(\frac{2.P_{t1}}{2.P_{t3}}\right) + \beta_2 Log\left(\frac{2.P_{t2}}{2.P_{t3}}\right) + \beta_4 Log\left(\frac{2.R_t}{2.P_{t3}}\right) + \varepsilon_t$$

$$= a + \beta_1 Log\left(\frac{P_{t1}}{P_{t3}}\right) + \beta_2 Log\left(\frac{P_{t2}}{P_{t3}}\right) + \beta_4 Log\left(\frac{R_t}{P_{t3}}\right) + \varepsilon_t$$

8-c)

Sous H_{01} la $SCR_{01} = 4{,}4$. Appliquant le test de Chow pour voir si on va accepter cette hypothèse.

$F_c = \frac{(SCR_{01} - SCR)/q}{SCR/T-K} = \frac{(4{,}4-3{,}9)/1}{3{,}9/25} = 3{,}205 \leq \mathcal{F}_{\alpha=5\%}(1{,}25) = 4{,}25 \Longrightarrow$ On accepte H_{01}

9)

9-a)

$\left(\frac{P_{t1}Q_t}{R_t}\right)$ est la part du revenu consacrée à l'achat du bien A.

9-b)

Si l'hypothèse l'hypothèse H_{02}: $\begin{cases} \boldsymbol{\beta_1 = -1} \\ \boldsymbol{\beta_2 = \beta_3 = 0} \\ \boldsymbol{\beta_4 = 1} \end{cases}$ est vraie, le modèle s'écrira comme suit :

$$Log(Q_t) = a - Log(P_{t1}) + Log(R_t) + \varepsilon_t \Leftrightarrow Log\left(\frac{P_{t1}Q_t}{R_t}\right) = a + \varepsilon_t$$

9-c)

Sous H_{02}, la part du revenu (en Log) consacrée à l'achat du bien A est une constante plus un terme d'erreur. Sous H_{02}, la demande du bien A est parfaitement inélastique par rapport aux prix des biens B et C. L'élasticité est unitaire par rapport à son prix P_1 et au revenu.

9-d)

Sous H_{02}, la $SCR_{02} = 5.9$. Vérifiant si cette hypothèse est vraie.

$F_c = \frac{(SCR_{02}-SCR)/q}{SCR/T-K} = \frac{(5,9-3,9)/4}{3,9/25} = 3,205 > \mathcal{F}_{\alpha=5\%}(4,25) = 2,76 \Longrightarrow$ On rejette H_{02}.

Partie II:

10)

$$\begin{cases} H_0: \rho = 0 \ \ independance\ des\ erreurs \\ H_1: \rho \neq 0 \ \ autocorrélation\ des\ erreurs \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 0 & & d_1 & & d_2 & & 0 & & 1-d_2 & & 1-d_1 & & 4 \\ I & --- & ! & --- & ! & --- & ! & --- & ! & --- & ! & --- & I \end{matrix}$$

Pour T=30 et k= 4, on :

$$d_1 = 1,14 \ \ et\ d_2 = 1,74$$

$d_2 < DW = 1,85 < 4 - d_2 \Longrightarrow on\ accepte\ H_0$ (absence d'auto corrélation des erreurs)

11) Testons l'hétéroscédasticité:

$$\begin{cases} H_0: Homoscédasticité \\ H_1: hétéroscédasticité \end{cases}$$

$$F_c = \frac{SCR_2}{SCR_1} = \frac{2.1}{1.65} = 1.272 \leq \mathcal{F}_{5\%}(7,7) = 3.79$$
$$\Rightarrow on\ accepte\ H_0. (le\ modèle\ est\ homoscédastique)$$

12) L'estimation par la méthode des MCO est acceptable car ces hypothèses sont vérifiées.

13)

$$\Delta Log(Q) = \hat{\beta}_1 \Delta Log\, P_1 + \hat{\beta}_2 \Delta Log\, P_2 + \hat{\beta}_3 \Delta Log\, P_3 + \hat{\beta}_4 \Delta Log\, R$$

$$\Delta Log(Q) = -0,56 \times 2 - 0,21 \times 3 + 0,07 \times 1 + 1,43 \times 20 = 26,92$$

31