Equipe : **M. Mzali H., Hajlaoui M., Saidi I., Chaieb S.Laabidi N., Tnani M.et Melki O.**

Examen, ***Janvier 2017***

- Les formules employées doivent être rappelées sur la copie.
- Aucun document n'est autorisé.
- Les résultats doivent être présentés 4 chiffres après la virgule.

Exercice #1 (10 points)

Soit F_Y une fonction de répartition d'une variable aléatoire Y définie par:

$$F_Y(y,\theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{\sqrt{y}}{\theta}}, & \text{si } y > 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité de probabilité de Y.
2. Si $X = \sqrt{Y}$, déterminer la fonction de répartition de X.
3. Déduire la densité de X et préciser sa loi et donner $E(X)$ et $V(X)$.
4. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon identiquement et indépendamment distribué que X.
   (a) Ecrire la fonction de vraisemblance.
   (b) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ.
   (c) $\hat{\theta}$ est-il sans biais?
   (d) $\hat{\theta}$ est-il convergent?
   (e) $\hat{\theta}$ est-il efficace?

Exercice #2 (4 points)

Dans un échantillon pris au hasard de 100 automobilistes, on constate que 25 d'entre eux possèdent une voiture de cylindrée supérieure à $1600cc$.

Quel est l'intervalle de confiance pour la proportion d'automobilistes possédant une voiture de cylindrée supérieure à $1600cc$?

Utiliser un niveau de confiance 95% et expliciter les étapes de calcul nécessaire.

Exercice #3 (6 points)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 inconnue, $X \sim \aleph(\mu, \sigma^2)$. A partir de 36 observations indépendantes les statistiques suivantes sont calculées: $\bar{x} = 7$ et $\sum_{i=1}^{36}(x_i - \bar{x})^2 = 5.6$.

1. Déterminer un intervalle de confiance de niveau 90% pour l'espérance μ.

2. Tester, pour $\alpha = 5\%$, l'hypothèse $H_0 : \mu = 6$ contre $H_1 : \mu = 8$, où α est le risque de première espèce.

3. Quelle est la décision à prendre?

Fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Fonction de répartition de la loi de Student à n ddl

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{x} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} dt$$

ddl	$P(X \leq x)$				
n	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
70	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
90	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626

Examen, *Janvier 2017*

Exercice #1 (10 points)

1. La densité est la derivée première, $f_Y(y) = F'_Y(y,\theta)$ alors

$$f_Y(y,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta\sqrt{y}} e^{-\frac{\sqrt{y}}{\theta}}, & \text{si } y > 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Etant donnée que $X = \sqrt{Y}$ alors

$$F_X(x,\theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

   avec $\theta > 0$ donc $f_X(x) = F'_X(x)$ est définie par

$$f_X(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. X suit donc une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$, $X \sim exp(\frac{1}{\theta})$. Il vient donc

$$\begin{cases} E(X) = \theta \\ V(X) = \theta^2. \end{cases}$$

4. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ étant un échantillon identiquement et indépendamment distribué que X.

   (a) La fonction de vraisemblance de cet échantillon est la fonction $L(\cdot)$ obtenue par

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = \Pi_{i=1}^n f_X(x_i, \theta).$$

   Or, $f_X(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$, pour $x > 0$ et $f_X(x,\theta) = 0$ ailleurs. Donc,

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i}$$

   et sous une forme transformée

$$LogL(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = -nLog(\theta) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i$$

   (b) Etant donné que $X(\Omega)$ est indépendant du paramètre inconnu θ, la valeur $\hat{\theta}$ qui rend maximum la fonction $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)$ de vraisemblance de l'échantillon est retenue comme estimateur de θ. L'estimateur $\hat{\theta}$ est la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)}{\partial\theta} = 0, \\ \frac{\partial^2 L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)}{\partial\theta^2} < 0. \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \frac{\partial LogL(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)}{\partial\theta} = 0, \\ \frac{\partial^2 LogL(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)}{\partial\theta^2} < 0, \end{cases}$$

Il vient,

- la condition de premier ordre

$$-\frac{n}{\hat{\theta}} + \frac{1}{\hat{\theta}^2}\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \text{ et } \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

- la condition de second ordre

$$\frac{\partial^2 LogL(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{n}{\hat{\theta}^2} - \frac{2}{\hat{\theta}^3}\sum_{i=1}^{n} X_i < 0,$$

  est bien vérifiée lorsque $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Par conséquent, $\hat{\theta}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

(c) Etant donnée que $E(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}n\theta = \theta$, $\hat{\theta}$ est un estimateur sans biais de θ.

(d) Vu que $V(\hat{\theta}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}n\theta^2 = \frac{\theta^2}{n}$, et

$$\begin{cases} E(\hat{\theta}) = \theta, \\ \lim_{n\to+\infty} V(\hat{\theta}) = \lim_{n\to+\infty} = \frac{\theta^2}{n} = 0. \end{cases}$$

alors $\hat{\theta}$ est un estimateur convergent de θ.

(e) $X(\Omega)$ est indépendant de θ car $X(\Omega) = \Re^*+$ alors la quantité d'information de Fisher se définit par

$$I_n(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 LogL(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)}{\partial\theta^2}\right) = -\frac{n}{\hat{\theta}^2} + \frac{2}{\hat{\theta}^3}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{n}{\hat{\theta}^2}$$

donc $I_n(\theta) = \frac{1}{V(\hat{\theta})}$ indiquant que $\hat{\theta}$ est un estimateur efficace de θ.

Exercice #2 (4 points)

Pour un automobiliste i, il y a deux possibilités "posséder" ou "ne pas posséder" une voiture de cylindrée sup à $1600cc$ donc la variable aléatoire associée $X_i \sim B(p)$. Les automobilistes possédant une voiture de cylindrée sup à $1600cc$ dans l'échantillon tiré correspondent à la proportion f_n calculée par

$$f_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Or, $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est une somme de n variables indépendantes de Bernoulli, donc cette somme suit une loi binômiale de paramètre (n,p) d'où $n \cdot f_n \sim B(n,p)$. Il vient d'après l'algèbre des espérances et des variances,

$$\begin{cases} E(n \cdot f_n) = np, & \text{donnant lieu à } E(f_n) = p, \\ V(n \cdot f_n) = np(1-p), & \text{donnant lieu à } V(f_n) = \frac{p(1-p)}{n}. \end{cases}$$

Une estimation non biaisée pour p est donnée par la fréquence $f_n = \frac{25}{100} = 0.25$.

Par ailleurs, l'échantillon pris est de taille assez grande, $n \to +\infty$, la fréquence $f_n \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ car $n \geq 30, p \to 0.5$ et $np(1-p) > 3$. Il vient

$$Z = \frac{f_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1).$$

Pour un niveau $(1-\alpha) = 0.95$, l'intervalle de confiance se détermine sur la base des valeurs z_1 et z_2 telle que la probabilité $P(z_1 \leq Z \leq z_2) = 1 - \alpha = 0.95$.

La loi $N(0,1)$ étant symétrique, donc il est souvent supposé que $-z = -z_2 = z_1$ de telle sorte que $P(-z \leq Z \leq z) = 2P(Z \leq z) - 1 = 1 - \alpha$. D'où la probabilité $P(Z \leq z) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$. La table de la loi $N(0,1)$ indique une valeur de $z = 1.96$.

La résolution du système d'inégalités

$$-z \leq \frac{f_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z$$

engendre un encadrement pour p défini par

$$f_n - z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq f_n + z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Donc pour $f_n = 0.25$ estimateur de de p, l'intervalle de confiance pour la proportion d'automobilistes possédant une voiture de cylindrée supérieure à $1600cc$ est

$$IC_{5\%}(p) = \left[0.25 - 1.96\sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{100}}, 0.25 + 1.96\sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{100}}\right] = [0.1651, 0.3349].$$

Exercice #3 (6 points)

1. Etant donnée que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ s'estime par $\hat{\mu} = \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ donc

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

   Mais, la variance σ^2 étant inconnue, son estimateur est la variance empirique corrigée

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

telle que

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1).$$

L'intégration de l'estimateur s^2 transforme la fonction pivotale ci-dessus en

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma}{\sqrt{\frac{1}{(n-1)\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{s} \sim t(n-1).$$

Pour un niveau $(1-\alpha) = 0.90$, l'intervalle de confiance se détermine sur la base des valeurs z_1 et z_2 telle que $P(z_1 \leq Z \leq z_2) = 1-\alpha$.

Or, pour un degré de liberté $(n-1 = 35) > 30$ la loi de Student est approchée par une loi normale $N(0,1)$.

Par ailleurs, la loi $N(0,1)$ étant symétrique alors il est souvent supposé que $-z = -z_2 = z_1$ de telle sorte que $P(-z \leq Z \leq z) = 2P(Z \leq z) - 1 = 1-\alpha$, d'où la probabilité $P(Z \leq z) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95$ correspond selon la table $N(0,1)$ au quantile $z = 1.65$.

Il vient que la résolution du système d'inégalités $z_1 \leq Z \leq z_2$ en résulte un intervalle de confiance au seuil $(1-\alpha) = 0.90$ défini par l'encadrement $\bar{X} - z\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z\frac{s}{\sqrt{n}}$, donc

$$IC_{10\%}(\mu) = \bar{X} \pm z\frac{s}{\sqrt{n}} = 7 \pm 1.65\frac{0.4}{\sqrt{36}} = [6.89, 7.11],$$

pour $n = 36$, $z = 1.65$, $\bar{X} = 7$ et $s^2 = \frac{1}{35}\sum_{i=1}^{36}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{5.6}{35} = 0.16$

2. Il s'agit d'un test d'une hypothèse simple contre une autre simple. Donc, d'après le théorème de Neymann-Pearson, la région de rejet (critique) RR s'obtient par

$$RR = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \frac{L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_0)}{L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1)} \leq k\}.$$

Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ un échantillon issu de X avec $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Sous H_0,

$$L_0 = L(x_1, \cdots, x_n, \mu_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right\};$$

Sous H_1,

$$L_1 = L(x_1, \cdots, x_n, \mu_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2\right\}.$$

Le rapport

$$\frac{L_0}{L_1} = \frac{L_0}{L_1} = exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2\right]\right\} \leq k,$$

dont la forme transformée est

$$\frac{-1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2\right] \leq Log(k).$$

Le développement de cette dernière donne

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu_0\sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu_0^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\mu_1\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu_1^2 \geq -2\sigma^2 Log(k).$$

La simplification et la factorisation en résultent

$$(\mu_1-\mu_0)\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{1}{2}\left(n\mu_1^2 - n\mu_0^2 - 2\sigma^2 Log(k)\right).$$

La région de rejet (critique) est $RR = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \bar{X} \geq C\}$, car $\mu_0 = 6$ et $\mu_1 = 8$.

La constante C de la région de rejet de l'hypothèse de base H_0 se détermine selon que la variance est connue ou inconnue et ce pour une probabilité fixée a priori α.

En effet, la variable $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, l'estimateur de la moyenne μ est $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ d'où sous l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$, la variable aléatoire

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

Lorsque la variance étant inconnue, l'emploi de l'estimateur

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,$$

en résulte une variable de Student

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

Le risque α étant defini par $P(\bar{X} \geq C/H_0) = \alpha$, donc l'inclusion de l'estimateur de la variance engendre

$$P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq \frac{C-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

$n = 36$ étant assez élevé donc la loi de Student est approchée par la loi $N(0,1)$ donc pour une probabilité $\alpha = 0.05$, la table de la loi $N(0,1)$ donne une valeur du quantile $\frac{C-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = 1.65$ ce qui permet de trouver un seuil critique $C = \mu_0 + 1.65\frac{s}{\sqrt{n}} = 6.11$, pour $\mu_0 = 6$, $s = 0.4$ et $n = 36$.

La règle de décision: L'hypothèse de base H_0 est rejetée lorsque la valeur observée $\bar{x} \geq 6.11$.

3. A partir des 36 observations prélevées, $\bar{x} = 7 \geq 6.11$, l'hypothèse de base H_0 n'est pas retenue.