

Partie1**Calcul du BFR :**

	Fin 0	Fin 1	Fin 2	Fin 3
Demande		70 000	70 000	70 000
Prix unitaire		85	85	85
CAHT		5 950 000	5 950 000	5 950 000
BFR=n*CAHT/360 avec n=45 pour les années 1 et 2 et n=27 pour l'année 3		743 750	743 750	446 250
ΔBFR (si Δ<0 : BFR et si Δ>0 : récupération du BFR)	-743 750	0	297 500	446 250

Calcul des cash-flows :

	Fin 0	Fin 1	Fin 2	Fin 3
Flux d'investissement	-5 058 750	0	297 500	446 250
voitures = 5x54000	-270 000			
équipements	-4 000 000			
formation	-45 000			
variation BFR (>0 ou <0)	-743 750	0	297 500	446 250
Flux d'exploitations				
CAHT		5 950 000	5 950 000	5 950 000
- Charges variables (60%*CAHT)		-3 570 000	-3 570 000	-3 570 000
- Location		-90 000	-90 000	-90 000
= EBE		2 290 000	2 290 000	2 290 000
- Impôts = 30%*EBE		-687 000	-687 000	-687 000
= EBE nets d'impôts		1 603 000	1 603 000	1 603 000
+ économies d'impôts sur amt = 30%,(270000/5+4000000/5+45000/3)		260 700	260 700	260 700
= 30%*869000=260 700				
= Flux d'exploitations		1 863 700	1 863 700	1 863 700
Flux de désinvestissement				1 760 500
Cession voitures :				183 000
Impôts sur + Value cession voitures : VCN fin 3=108000 d'où +V=75000				-22 500
Cession équipements :				1 600 000
Impôts sur + Value cession équipements : VCN fin 3=1600000 d'où +V=0				0
Cash-Flows	-5 058 750	1 863 700	2 161 200	4 070 450

Calcul de la VAN :

$$VAN = -5\,058\,750 + \frac{1\,863\,700}{1.15} + \frac{2\,161\,200}{1.15^2} + \frac{4\,070\,450}{1.15^3} = 842\,423,34$$

Analyse de sensibilité aux coûts variables : CV qui annulent la VAN :

$$VAN = 0 \text{ signifie } -5\,058\,750 + \frac{CF_1}{1.15} + \frac{CF_2}{1.15^2} + \frac{CF_3}{1.15^3} = 0$$

6578200 – 111878.CVU₀ = 0 ainsi CVU₀ = 58,79 or CVU = 85 * 60% = 51 d'où une variation de 15,29%
Ainsi un accroissement de coûts variables supérieur à 15,29% rend la VAN du projet nulle.

En l'absence de la formule de calcul proposée dans l'énoncé : il faut faire le calcul comme suit :

$$VAN = 0 \text{ signifie } -5\,058\,750 + \frac{CF_1}{1.15} + \frac{CF_2}{1.15^2} + \frac{CF_3}{1.15^3} = 0$$

$$CF_t = (CAHT - 70000.CVU - Loyers).(1 - 30\%) + 30\% * Dotations + \Delta BFR + Flux \text{ de désinvestissement}$$

$$CF_1 = (5950000 - 70000.CVU - 90000).(1 - 30\%) + 260700 = 4362700 - 49000.CVU$$

$$CF_2 = (5950000 - 70000.CVU - 90000).(1 - 30\%) + 260700 + 297500 = 4660200 - 49000.CVU$$

$$CF_3 = (5950000 - 70000.CVU - 90000).(1 - 30\%) + 260700 + 446250 = 6569450 - 49000.CVU$$

Il est possible de retrouver les CFT à partir de la question 1 de l'exercice : sachant : CV=70000*85*60%=3570000

$$CF_1 = 1863700 + 3570000 * (1 - 30\%) - 70000 * CVU * (1 - 30\%) = 4362700 - 49000.CVU$$

$$CF_2 = 2161200 + 3570000.(1 - 30\%) - 70000.CVU.(1 - 30\%) = 4660200 - 49000.CVU$$

$$CF_3 = 4070450 + 3570000.(1 - 30\%) - 70000.CVU.(1 - 30\%) = 6569450 - 49000.CVU$$

$$\text{ainsi : } -5\,058\,750 + \frac{4362700 - 49000.CVU}{1.15} + \frac{4660200 - 49000.CVU}{1.15^2} + \frac{6569450 - 49000.CVU}{1.15^3} = 0$$

Calcul de la VAN espérée et du risque du projet mesuré par l'écart-type de la VAN :**Rappel :**

La VAN, combinaison linéaire de n variables aléatoires est donc une variable aléatoire avec :

$$\tilde{VAN} = -I_0 + \tilde{CF}_1.(1+k)^{-1} + \tilde{CF}_2.(1+k)^{-2} + \tilde{CF}_3.(1+k)^{-3} + \dots + \tilde{CF}_n.(1+k)^{-n}$$

Sachant l'information relative au calcul des E(CF_t) et de la variance de chaque Cash-Flow :

$$E(\tilde{VAN}) = -I_0 + \sum_{t=1}^n E(\tilde{CF}_t).(1+k)^{-t}$$

$$\sigma_{\tilde{VAN}}^2 = \sum_{t=1}^n \frac{\sigma_{\tilde{CF}_t}^2}{(1+k)^{2t}} \quad \text{si le coef de corrélation } \rho_{i,j} = 0 \quad \forall i \text{ et } j \text{ (indépendance entre les cash - flows)}$$

$$\sigma_{\tilde{VAN}} = \sum_{t=1}^n \frac{\sigma_{\tilde{CF}_t}}{(1+k)^t} \quad \text{si coef de corrélation } \rho_{i,j} = +1 \quad \forall i \text{ et } j \text{ (dépendance parfaite positive entre les cash - flows)}$$

	CF1	CF2	CF3
Espérance	1 736 300	1 886 800	3 654 100
Ecart-type	254 800	336 070	401 630

$$E(\tilde{VAN}) = -5058750 + \frac{1736300}{1,15} + \frac{1886800}{1,15^2} + \frac{3654100}{1,15^3} = 28039802$$

Calcul de la variance de la VAN, cas d'une indépendance totale des CF :

$$\sigma_{\tilde{VAN}}^2 = \sum_{t=1}^n \frac{\sigma_{\tilde{CF}_t}^2}{(1+k)^{2t}} = \left(\frac{254800}{1,15} \right)^2 + \left(\frac{336070}{1,15^2} \right)^2 + \left(\frac{401630}{1,15^3} \right)^2 = (428257)^2 \Rightarrow \sigma_{\tilde{VAN}} = 428257$$

$$P(VAN > 0) = P\left(Z > \frac{0 - 280398}{428257}\right) = P(Z > -0,655) = P(Z < 0,655) = 0,7422 \quad \text{table de la loi normale}$$

Rappel modèle de Modigliani et Miller 1963 :

En présence d'impôts la dette a un avantage économique mesuré par les économies d'impôts sur les intérêts. Une société endettée ne peut donc pas avoir la même valeur qu'un autre non endettée.

Proposition I de MM (1963) : Une firme non endettée U a une valeur V_U égale au bénéfice d'exploitation espéré net d'impôt $[E(BAII).(1-\tau)]$ capitalisé au taux de rentabilité économique $\rho = k_e^U$. Ainsi, $V_U = \frac{E(BAII).(1-\tau)}{\rho}$. Et suite aux économies

d'impôt qu'une entreprise endettée L peut réaliser sur les intérêts, la valeur d'une entreprise endettée est égale à $V_L = V_U + \tau \cdot D$.
Où D désigne la valeur de marché des obligations (dettes)

Proposition II de MM (1963) : La rentabilité financière ou le rendement exigé par les actionnaires d'une société endettée :

$$k_e^L = \rho + (\rho - r)(1 - \tau) \cdot \frac{D}{S_L}$$

Proposition III de MM (1963) : Le CMPC qui correspond au taux de rejet des investissements est égal à $CMPC = \rho(1 - \tau \frac{D}{V_L})$ et

La politique optimale correspond à un maximum de dettes.

Le bêta des actifs d'une firme est égal au bêta d'un portefeuille de l'ensemble de la dette et des fonds propres de l'entreprise.

Ainsi, le risque systématique des actions d'une société endettée : $\beta_L = \beta_U \left[1 + (1 - \tau) \frac{D}{S_L} \right]$.

$$V_L = S_L + D \quad \text{et} \quad S_L = \frac{\text{Bénéfice net}}{k_e^L} = \frac{(BAII - i \cdot D).(1 - \tau)}{k_e^L}$$

Calcul du bêta de la société endettée Bestglasses :

bêta ations de la société bestglasses, qui est endettée (firme L) : β_L

bêta ations d'une société non endettée de la même classe de risque que bestglasses (firme U) : β_U

$$\beta_L = \beta_U \left[1 + (1 - \tau) \frac{D}{S_L} \right]$$

$$\beta_{\text{dettes}} = \beta_{\text{secteur}} = \beta_U = 0,8$$

$$\text{Bestglasses : } \frac{\text{Dettes}}{\text{Capitaux propres}} = \frac{D}{S} = 1 \Rightarrow \text{ainsi} \quad \frac{\text{Dettes}}{\text{Total actifs}} = \frac{D}{B + S} = \frac{D}{V} = 0,5$$

$$\beta_L = \beta_U \left[1 + (1 - \tau) \frac{D}{S_L} \right] = 0,8 [1 + (1 - 30\%).1] = 1,36 = \beta_{\text{bestglasses}}$$

La rentabilité d'équilibre est donnée par le MEDAF (CAPM) : sachant le bêta des actions de la société :

$$R_f = 8\% \quad \text{et} \quad E(R_M) = 18\% \quad \text{MEDAF (CAPM) : } E(R_i) = R_f + [E(R_M) - R_f] \beta_i$$

$$\text{ainsi } E(R_{\text{Bestglass}}) = R_f + [E(R_M) - R_f] \beta_{\text{Bestglass}} = 8\% + (18\% - 8\%).1,36 = 21,6\%$$

Afin de placer l'action de la société bestglasses sur la droite du MEDAF (SML), il faut calculer sa rentabilité observée :

Rentabilité observée de bestglasses :

Dividende perpétuel = 8,340 TND avec distribution totale des bénéfices

Prix actuel de l'action Bestglasses : $P_0 = 34,750$ dinars

$$\text{Gordon \& Shapiro (1ère version du modèle) : } k_e = k_s = \frac{D}{P_0} = \frac{8,340}{34,750} = 24\%$$

Jugement :

La rentabilité observée de bestglasses est de 24% alors que sa rentabilité d'équilibre est de 21,6%. La rentabilité observée > rentabilité d'équilibre, ainsi l'action bestglasses est située au-dessus de la droite du MEDAF (SML). La société bestglasses est sous-évaluée : le prix de son action sur le marché qui est actuellement de 34,750 est inférieur au prix d'équilibre. Il vaut mieux acheter les actions de la société à ce prix.

Le prix d'équilibre de la société bestglasses :

Méthode 1;

$$\text{Gordon \& Shapiro (1ère version)} : k_e = \frac{D}{P_0} \Rightarrow P_0 = \frac{D}{k_e}$$

Afin d'obtenir un prix d'équilibre, P_0 ; il suffit de retenir dans le modèle de G&S, le k_e d'équilibre.

$$k_e^{\text{Equi}} = E(R_i) \text{ du MEDAF} \Rightarrow P_0^{\text{Equi}} = \frac{D}{E(R_i)} = \frac{8,34}{21,6\%} = 38,6$$

Méthode 2;

$$S_L = \frac{(BAII - iD) \cdot (1 - \tau)}{K_e^L} = \frac{(1500000 - 8\% \cdot D) \cdot (1 - 30\%)}{21,6\%} \quad \text{or} \quad \frac{D}{S_L} = 1 \Rightarrow D = S_L$$

$$S_L = \frac{(1500000 - 8\% \cdot S_L) \cdot (1 - 30\%)}{21,6\%} \Rightarrow S_L = 4861111,111 - 0,259 \cdot S_L \Rightarrow S_L = 3860294$$

$$P_0^{\text{Equi}} = \frac{S_L}{100000} = \frac{3860294}{100000} = 38,6$$

Méthode 3;

$$\frac{D}{S_L} = 1 \Rightarrow D = S_L \quad \text{ainsi} \quad V_L = S_L + D = 2 \cdot S_L$$

$$\text{Prop 2 de MM 1963 ; } V_L = V_U + \tau \cdot D \Rightarrow 2 \cdot S_L = V_U + \tau \cdot S_L \Rightarrow S_L = \frac{V_U}{1,7}$$

$$V_U = \frac{E(BAII) \cdot (1 - \tau)}{\rho} \quad \text{et} \quad \rho = k_e^U = E(R_U) = R_f + (E(R_M) - R_f) \cdot \beta_U = 8\% + (18\% - 10\%) \cdot 0,8 = 16\%$$

$$V_U = \frac{1500000(1 - 30\%)}{16\%} = 6562500 \Rightarrow S_L = \frac{V_U}{1,7} = \frac{6562500}{1,7} = 3860294$$

$$P_0^{\text{Equi}} = \frac{S_L}{100000} = \frac{3860294}{100000} = 38,6$$

Le prix à la fin N+2 garantissant un $k_e = \text{TRI} = 23,7\%$ de la société bestglasses :

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+k_e)} + \frac{D_2}{(1+k_e)^2} + \frac{D_3}{(1+k_e)^3} + \frac{D_4}{(1+k_e)^4} + \dots + \frac{D_n}{(1+k_e)^n} + \dots \infty$$

01-01-N : date 0 31-12-N : date 1 31-12-N+1 : Date 2 31-12-N+2 = Date 3 ainsi Prix au 31-12-N+2 est le prix P_3

$$\Rightarrow P_0 = \frac{D_1}{(1+k_e)} + \frac{D_2}{(1+k_e)^2} + \frac{D_3}{(1+k_e)^3} + \frac{1}{(1+k_e)^3} \left(\frac{D_4}{(1+k_e)^1} + \dots + \frac{D_n}{(1+k_e)^{n-3}} + \dots \infty \right) = \frac{D_1}{(1+k_e)} + \frac{D_2}{(1+k_e)^2} + \frac{D_3}{(1+k_e)^3} + \frac{1}{(1+k_e)^3} (P_3)$$

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+k_e)} + \frac{D_2}{(1+k_e)^2} + \frac{D_3}{(1+k_e)^3} + \frac{P_3}{(1+k_e)^3} = \frac{D_1}{(1+k_e)} + \frac{D_2}{(1+k_e)^2} + \frac{D_3 + P_3}{(1+k_e)^3}$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = 8,34 \quad P_0 = 34,75 \quad k_e = \text{TRI} = 23,7\%$$

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+k_e)} + \frac{D_2}{(1+k_e)^2} + \frac{D_3 + P_3}{(1+k_e)^3} \Rightarrow 34,75 = \frac{8,34}{1,237} + \frac{8,34}{1,237^2} + \frac{8,34 + P_3}{1,237^3} \Rightarrow P_3 = 34,5$$

Différence entre APE et la procédure du private equity

le private equity permet de consolider les capitaux propres, il est réservé aux sociétés non cotées, et il suppose une association avec une SICAR ou un fonds d'investissement, toutefois son obtention est relativement difficile. Quant à l'APE il nécessiterait l'obtention du visa du CMF par la soumission d'un prospectus d'introduction en bourse. En cas de réussite de l'opération, l'entreprise sera cotée en bourse. Et là on aura les avantages et les inconvénients d'une introduction en bourse.

Partie 2

Rentabilité du Portefeuille efficient ayant une variance de 3,4%

$$E(R_p) = 0,1046 \pm \sqrt{0,0574\sigma_p^2 - 0,0016}$$

$$\sigma_p^2 \leq 3,4\% \Rightarrow \text{si } P \text{ est efficient} \Rightarrow E(R_p) = 0,1046 + \sqrt{0,0574 \cdot 3,4\% - 0,0016} = 12,33\%$$

Ainsi ce n'est pas possible d'avoir un portefeuille offrant une rentabilité supérieure à celle du portefeuille efficient (12,33%) pour un niveau de risque de 3,4%.

Composition du Portefeuille efficient ayant une variance de 3,4%

$$P \text{ efficient alors: } E(R_p) = 0,1046 + \sqrt{0,0574\sigma_p^2 - 0,0016}$$

$$\sigma_p^2 = 3,4\% \Rightarrow E(R_p) = 0,1046 + \sqrt{0,0574 \cdot 3,4\% - 0,0016} = 12,33\%$$

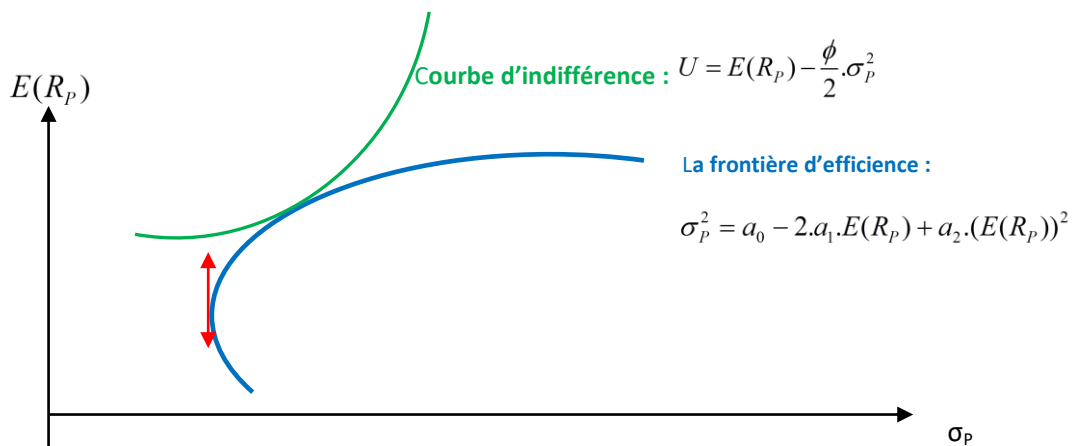
$$X^* = \begin{pmatrix} X_{titre1}^* \\ X_{titre2}^* \\ X_{titre3}^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -16,411 & 2,592 \\ 7,903 & -0,796 \\ 8,295 & -0,766 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} E(R_p) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16,411 & 2,592 \\ 7,903 & -0,796 \\ 8,295 & -0,766 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 12,33\% \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56,76\% \\ 17,88\% \\ 25,718\% \end{bmatrix}$$

Rappel : Les caractéristiques du portefeuille optimal de titres risqués :

Un investisseur rationnel et averse au risque choisira un portefeuille qui maximise son niveau d'utilité.

Ce niveau d'utilité est donné par : $U = E(R_p) - \frac{\phi}{2} \cdot \sigma_p^2$ $\phi > 0$ et décrit le degré d'aversité au risque.

L'investisseur est rationnel et averse au risque : $\frac{\partial U}{\partial E(R_p)} > 0$ et $\frac{\partial U}{\partial \sigma_p^2} < 0$

**Solution 1 :**

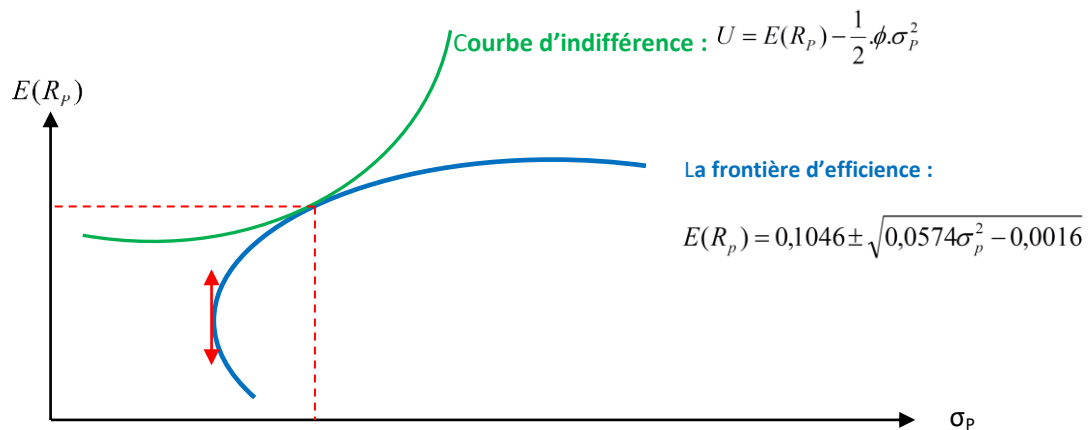
Ce portefeuille est tangent à la frontière de portefeuilles efficaces et appartient à l'une des courbes d'indifférence. Il vérifie alors les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_p^2 = \frac{2}{\Phi} E(R_p) - \frac{2 \cdot u}{\Phi} \\ \sigma_p^2 = a_0 - 2 \cdot a_1 \cdot E(R_p) + a_2 \cdot (E(R_p))^2 \end{cases} \quad \text{d'où : } \begin{cases} \frac{2}{\Phi} E(R_p) - \frac{2 \cdot u}{\Phi} = a_0 - 2 \cdot a_1 \cdot E(R_p) + a_2 \cdot (E(R_p))^2 \end{cases}$$

On obtient un polynôme de degré 2 en $E(R_p)$ et la solution à ce polynôme est unique (la résolution d'un polynôme de degré 2 nécessite le calcul du Δ , la solution est unique si $\Delta = 0$)

Solution 2 :

$$\text{Les pentes au point tangent sont égales : } \begin{cases} \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial E(R_p)} = \frac{2}{\Phi} \\ \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial E(R_p)} = 2 \cdot a_2 \cdot E(R_p) - 2 \cdot a_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{\Phi} = a_2 \cdot E(R_p) - a_1 \end{cases}$$

$\phi = 3,06$ - niveau d'utilité- l'équivalent certain

$$E(R_p) = 0,1046 \pm \sqrt{0,0574 \sigma_p^2 - 0,0016} \quad (\text{Eq1})$$

$$U = E(R_p) - \frac{1}{2} \cdot \phi \cdot \sigma_p^2 \Rightarrow E(R_p) = U + \frac{1}{2} \cdot \phi \cdot \sigma_p^2 \quad (\text{Eq2})$$

Les pentes au point tangent sont égales $\Rightarrow \left(\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p^2} \right)_{\text{Eq1}} = \left(\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p^2} \right)_{\text{Eq2}}$

$$\text{Eq1: } E(R_p) = 0,1046 \pm \sqrt{0,0574 \sigma_p^2 - 0,0016} \Rightarrow \frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p^2} = \frac{0,0574}{2 \cdot \sqrt{0,0574 \sigma_p^2 - 0,0016}} \quad \text{rappel dérivée: } (\sqrt{f})' = \frac{f'}{2 \cdot \sqrt{f}}$$

$$\text{Eq2: } E(R_p) = U + \frac{1}{2} \cdot \phi \cdot \sigma_p^2 \Rightarrow \frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p^2} = \frac{1}{2} \cdot \phi$$

$$\text{Ainsi } \frac{0,0574}{2 \cdot \sqrt{0,0574 \sigma_p^2 - 0,0016}} = \frac{1}{2} \cdot \phi \quad \text{avec } \sigma_p^2 = 3,4\% \Rightarrow \phi = \frac{0,0574}{\sqrt{0,0574 \cdot 3,4\% - 0,0016}} = 3,06$$

Il est possible de retrouver le même calcul comme suit en dérivant l'espérance par rapport à l'écart-type

Les pentes au point tangent sont égales $\Rightarrow \left(\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p} \right)_{\text{Eq1}} = \left(\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p} \right)_{\text{Eq2}}$

$$\text{Eq1: } E(R_p) = 0,1046 \pm \sqrt{0,0574 \sigma_p^2 - 0,0016} \Rightarrow \frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p} = \frac{2 \cdot 0,0574 \cdot \sigma_p}{2 \cdot \sqrt{0,0574 \sigma_p^2 - 0,0016}}$$

$$\text{Eq2: } E(R_p) = U + \frac{1}{2} \cdot \phi \cdot \sigma_p^2 \Rightarrow \frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p} = \phi \cdot \sigma_p$$

$$\text{Ainsi } \frac{2 \cdot 0,0574 \cdot \sigma_p}{2 \cdot \sqrt{0,0574 \sigma_p^2 - 0,0016}} = \phi \cdot \sigma_p \quad \text{avec } \sigma_p^2 = 3,4\% \Rightarrow \phi = \frac{0,0574}{\sqrt{0,0574 \cdot 3,4\% - 0,0016}} = 3,06$$

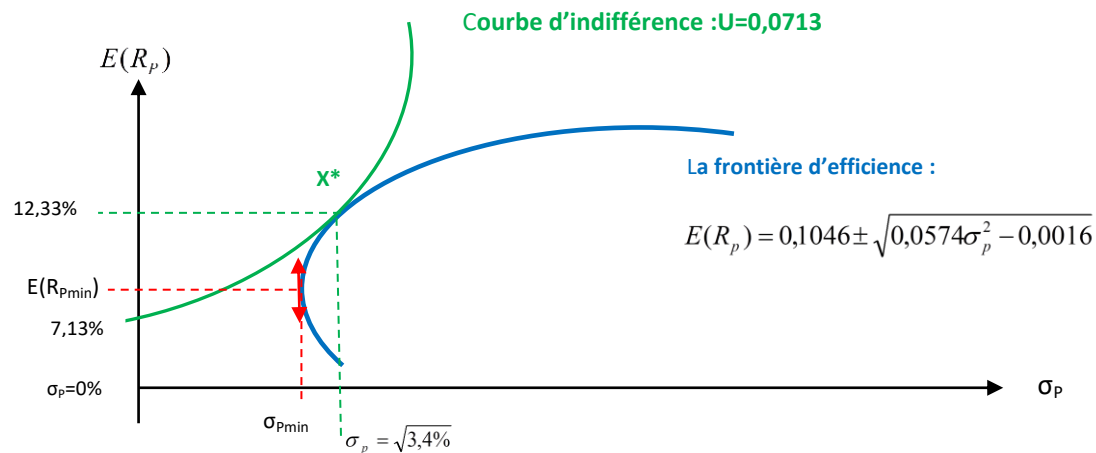
Le niveau d'utilité :

$$E(R_p) = 0,1046 \pm \sqrt{0,0574 \sigma_p^2 - 0,0016} = 12,33\%$$

$$U = E(R_p) - \frac{1}{2} \cdot \phi \cdot \sigma_p^2 = E(R_p) - \frac{1}{2} \cdot 3,06 \cdot \sigma_p^2 = 12,33\% - \frac{3,06}{2} \cdot 3,4\% = 0,0713$$

L'équivalent certain : Tous les portefeuilles appartenant à la courbe d'indifférence $U=0,0713$ offrent le même niveau d'utilité. Il s'agit alors de calculer la rentabilité d'un portefeuille sans risque (risque=0) et qui procure le même niveau d'utilité $U=0,0713$ que le portefeuille X^* (la variance de X^* est de 3,4%).

Sur le graphique, c'est le point où la courbe d'indifférence qui traverse l'axe des ordonnées.



P tel que : $\sigma_p^2 = 0\%$ avec un niveau d'utilité $U = 0,0713$

$$U = E(R_p) - \frac{1}{2} \cdot \phi \cdot \sigma_p^2 \Rightarrow 0,0713 = E(R_p)$$

P : équivalent certain de X^* : $\sigma_p^2 = 0\%$ et $E(R_p) = 7,13\%$

Portefeuille avec aversion maximale au risque : Portefeuille à variance minimale :

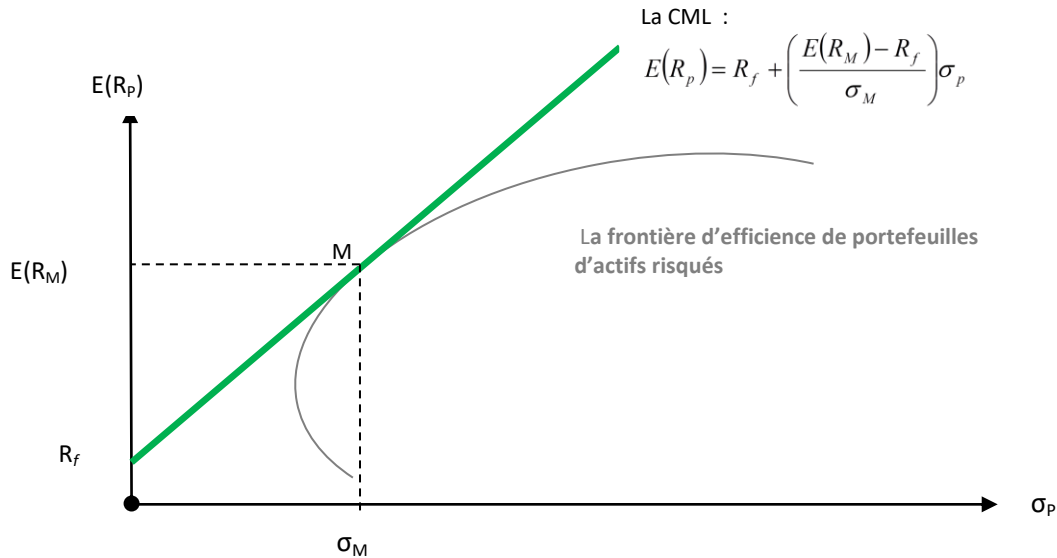
Le Portefeuille efficient à variance minimale (le point d'inflexion de la courbe d'efficacité) est aussi le portefeuille efficient ayant la rentabilité la plus faible (voir le graphique ci-dessus).

P_{min} vérifie l'équation de la frontière, ainsi : $E(R_p) = 0,1046 \pm \sqrt{0,0574\sigma_p^2 - 0,0016}$

$E(R_p)$ est à son minimum ssi : $\sqrt{0,0574\sigma_p^2 - 0,0016} = 0 \Rightarrow 0,0574\sigma_p^2 - 0,0016 = 0 \Rightarrow \sigma_p^2 = 2,78\% \Rightarrow E(R_{pmin}) = 10,46\%$

Rappel : Choix de portefeuille avec actif sans risque

L'ensemble des portefeuilles efficients de titres risqués dans un repère $(\sigma_P; E(R_P))$ est représenté par une droite, la capital market line (CML ou droite de marchés de capitaux) comme suit :



Tous les investisseurs sur le marché choisiront le portefeuille M de titres risqués placé sur la tangente entre la frontière efficiente de titres risqués et la droite passant par R_f , c'est le portefeuille du marché. M correspond au point de tangence entre la frontière d'efficience de portefeuille de titres risqués et la droite passant par R_f . M appartient aussi point la droite (CML) qu'à la frontière de portefeuilles de titres risqués et il est unique.

L'équation de la droite CML : $E(R_P) = R_f + \left(\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} \right) \sigma_P$, la pente de la droite $\lambda = \left(\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} \right)$

La rentabilité des portefeuilles de la CML : $\tilde{R}_P = x_M \cdot \tilde{R}_M + x_f \cdot R_f$ avec $x_M + x_f = 1$

La rentabilité espérée d'un portefeuille P appartenant à la CML : $E(\tilde{R}_P) = x_M \cdot E(\tilde{R}_M) + x_f \cdot R_f$

Le risque d'un portefeuille P appartenant à la CML : $\sigma_P = x_M \cdot \sigma_M$

Actif sans risque : $R_f=5,25\%$; la pente de la CML = 39,45%

$$Eq(1) : E(R_P) = 0,1046 \pm \sqrt{0,0574\sigma_P^2 - 0,0016}$$

$$Eq(2), CML : E(R_P) = R_f + \left(\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} \right) \sigma_P = 5,25\% + 39,45\% \cdot \sigma_P$$

M correspond au point de tangence, au point M, les pentes de l'équation 1 et de l'équation 2 sont égales

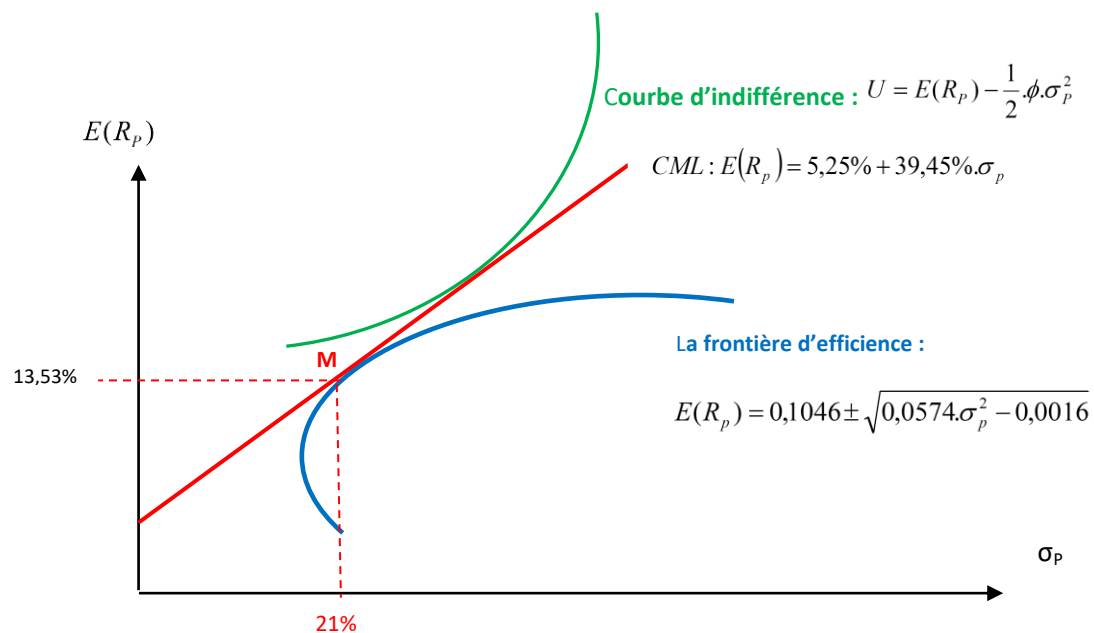
$$\text{Les pentes au point tangent sont égales} \Rightarrow \left(\frac{\partial E(R_P)}{\partial \sigma_P} \right)_{Eq1} = \left(\frac{\partial E(R_P)}{\partial \sigma_P} \right)_{Eq2} \Rightarrow \frac{2 \cdot 0,0574 \cdot \sigma_M}{2 \cdot \sqrt{0,0574\sigma_M^2 - 0,0016}} = 39,45\%$$

$$\frac{2 \cdot 0,0574 \cdot \sigma_M}{2 \cdot \sqrt{0,0574\sigma_M^2 - 0,0016}} = 39,45\% \Rightarrow \left(\frac{0,0574 \cdot \sigma_M}{\sqrt{0,0574\sigma_M^2 - 0,0016}} \right)^2 = (39,45\%)^2$$

$$\Rightarrow \frac{0,329\% \cdot \sigma_M^2}{0,0574\sigma_M^2 - 0,0016} = 15,563\%$$

$$\Rightarrow 0,564\sigma_M^2 = 0,025\% \Rightarrow \sigma_M^2 = 4,413\% \Rightarrow \sigma_M = 21\%$$

$$\text{sachant } \sigma_M = 21\% \Rightarrow E(R_M) = 5,25\% + 39,45\% \cdot 21\% = 13,534\%$$

Choix de portefeuille optimal en présence d'un actif sans risque

Le portefeuille optimal correspond au point de tangence entre la courbe d'indifférence et la CML.

$$Eq(1): U = E(R_p) - \frac{1}{2} \cdot \phi \cdot \sigma_p^2 \Rightarrow U = E(R_p) - \frac{1}{2} \cdot 3,06 \cdot \sigma_p^2 = E(R_p) - 1,53 \cdot \sigma_p^2 \Rightarrow Eq(1): E(R_p) = U + 1,53 \cdot \sigma_p^2$$

$$Eq(2), CML: E(R_p) = 5,25\% + 39,45\% \cdot \sigma_p$$

P* optimal correspond au point de tangence, au point P*, les pentes de l'équation 1 et de l'équation 2 sont égales

$$\text{Les pentes au point tangent sont égales} \Rightarrow \left(\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p} \right)_{Eq1} = \left(\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p} \right)_{Eq2} \Rightarrow 2 \cdot 1,53 \cdot \sigma_{p*} = 39,45\% \Rightarrow \sigma_{p*} = 12,89\% \approx 12,9\%$$

$$E(R_{p*}) = 5,25\% + 39,45\% \cdot \sigma_{p*} = 10,33\%$$

$$U = E(R_{p*}) - 1,53 \cdot \sigma_{p*}^2 = 10,33\% - 1,53 \cdot (12,89\%)^2 = 0,0778$$

P* appartient à la CML, la composition de ce portefeuille P*: x_f de l'actif sans risque et x_M dans le portefeuille du marché M et

Le risque d'un portefeuille P* appartenant à la CML :

$$\sigma_{p*} = x_M \cdot \sigma_M \Rightarrow x_M = \frac{\sigma_{p*}}{\sigma_M} = \frac{12,89\%}{21\%} = 61,38\% \Rightarrow x_f = 100\% - 61,38\% = 38,62\%$$

Comparaison de l'ancien portefeuille optimal X* et du nouveau portefeuille optimal P*

$$X^* = \begin{pmatrix} X_{titre1}^* \\ X_{titre2}^* \\ X_{titre3}^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 56,76\% \\ 17,88\% \\ 25,718\% \end{bmatrix} \quad \sigma_{X^*}^2 = 3,4\% \Rightarrow \sigma_{X^*} = 18,44\% \quad E(R_{X^*}) = 12,33\% \quad \text{et} \quad U_{X^*} = 0,0713$$

En présence de l'actif sans risque le portefeuille P* :

$$X_{P^*} = \begin{pmatrix} x_f = 38,62\% \\ x_M = 61,38\% \end{pmatrix} \quad \sigma_{P^*} = 12,9\% \quad E(R_{P^*}) = 10,33\% \quad U_{P^*} = 0,0778$$

P* a un risque et une rentabilité plus faible que X* mais offre un niveau d'utilité plus élevé

Partie 3

Somme à décaisser au comptant concernant les importations :

L'entreprise française fait un achat au comptant de 240 000 TND (50000x12TNDx40%) contre euros au cours comptant vendeur du dinar tunisien par rapport à l'euro

$$\left(\frac{S_{TND}^b}{EUR} = CC_{TND/EUR}^V = \frac{1}{3,1436} \right) + \text{Marge} \quad \text{Soit} \quad 240\,000 \text{ TND} \times \frac{1}{3,1436} + 50 \text{ EUR} = 76\,395,591 \text{ EUR}$$

Somme à encaisser au comptant concernant les exportations :

L'entreprise française fait une vente au comptant de 450 000 TND (50000 x 18TNDx50%) contre euros au cours comptant acheteur du dollar canadien par rapport à l'euro ($\frac{S_{CAD}^a}{EUR} = CC_{CAD/EUR}^A = \frac{1}{1,4705}$) - Marge

$$\text{Soit} \quad 450\,000 \text{ TND} \times \frac{1}{1,4705} - 50 \text{ EUR} = 305\,968,361 \text{ EUR}$$

Somme à décaisser dans 3 mois concernant les importations

L'entreprise française fait un achat à terme de 360 000 TND (50000 x 12TNDx60%) contre euros au cours à terme vendeur du dinar tunisien par rapport à l'euro à 3 mois ($\frac{F_{TND}^b}{EUR,3}$ ou $\frac{CT_{TND}^V}{EUR,3}$) + Marge

$$\begin{aligned} \frac{CT_{TND}^V}{EUR,3} &= CC_{TND/EUR}^V \times \frac{(1 + (\text{Taux prêteur sur l'euro à 3 mois} \times \frac{3}{12}))}{(1 + (\text{Taux emprunteur sur le dinar à 3 mois} \times \frac{3}{12}))} \\ &= \frac{1}{3,1436} \times \frac{(1 + ((1 + 1/8)\% \times \frac{3}{12}))}{(1 + (5^{3/4}\% \times \frac{3}{12}))} = 0,3145 \end{aligned}$$

Somme à décaisser dans 3 mois : 360 000 TND x (0,3145 + 0,0005) = 113 400 EUR

Somme à encaisser dans 2 mois suite aux exportations

L'entreprise française fait une vente à terme de 450 000 CAD contre euros au cours à terme acheteur du dollar canadien par rapport à l'euro à 2 mois ($\frac{F_{CAD}^a}{EUR,2}$ ou $\frac{CT_{CAD}^A}{EUR,2}$) - Marge

$$\begin{aligned} \frac{CT_{CAD}^A}{EUR,2} &= CC_{CAD/EUR}^A \times \frac{(1 + (\text{Taux emprunteur sur l'euro à 2 mois} \times \frac{2}{12}))}{(1 + (\text{Taux prêteur sur le dollar canadien à 2 mois} \times \frac{2}{12}))} \\ &= \frac{1}{1,4705} \times \frac{(1 + (3/4\% \times \frac{2}{12}))}{(1 + (2^{8/4} + \frac{1}{4})\% \times \frac{2}{12}))} = 0,6782 \end{aligned}$$

Somme à encaisser dans 2 mois : 450 000 CAD x (0,6782 - 0,0005) = 304 965 EUR

Prix du litre d'huile d'olive au Canada = Prix du litre d'huile d'olive en Tunisie x le taux de change du dinar tunisien par rapport au dollar canadien (TND/CAD) :

$$\frac{TND}{CAD} = \frac{20}{12} = 1,666 \Rightarrow \frac{CAD}{TND} = \frac{1}{1,666} = 0,6 \quad \text{ou bien} \quad \frac{CAD}{TND} = \frac{12}{20} = 0,6$$

$$CC_{\text{croisé}}^{\text{TND/CAD}} \text{ moyen} = \frac{CC_{TND/CAD}^A + CC_{TND/CAD}^V}{2}$$

$$CC_{TND/CAD}^A = CC_{TND/EUR}^A \cdot CC_{EUR/CAD}^A = \frac{CC_{TND/EUR}^A}{CC_{CAD/EUR}^V} = \frac{1,4678}{3,1548} = 0,4653$$

$$CC_{TND/CAD}^V = CC_{TND/EUR}^V \cdot CC_{EUR/CAD}^V = \frac{CC_{TND/EUR}^V}{CC_{CAD/EUR}^A} = \frac{1,4705}{3,1436} = 0,4678$$

$$CC_{\text{croisé}}^{\text{TND/CAD}} \text{ moyen} = \frac{0,4653 + 0,4678}{2} = 0,4665$$

TND/CAD = 0,4665 à Paris(Marché) < TND/CAD = 1,6667 (loi du prix unique)

Le dinar tunisien est sous-évalué.

Le litre d'huile d'olive coûte moins cher en Tunisie qu'au Canada.

Les exportations tunisiennes vont augmenter. Il y aura une demande de dinar tunisien par rapport au dollar canadien. Le TND/CAD va augmenter jusqu'à se rapprocher du cours d'équilibre à 1,6667.