Correction détaillée avec résumé du cours – Rattrapage Mars 2017

Soit les 3 titres A, B et C dont les rendements sont définis par : $E(\tilde{R}) = \begin{pmatrix} E(R_A) = 7{,}5\% \\ E(R_B) = 11{,}5\% \\ E(R_C) == 15{,}85\% \end{pmatrix}$;

Les coefficients de corrélation entre les 3 titres A, B et C : $\rho_{A,B} = 0{,}31$; $\rho_{B,C} = 0{,}51$; $\rho_{A,C} = 0{,}14$;

L'écart-type (le risque) des 3 titres A, B et C : $\sigma_A = 16\%$; $\sigma_B = 27\%$; $\sigma_C = 3\%$

Il est alors possible de calculer sur la base de ces informations la matrice des variances-covariances suivante :

$\sigma_{i,j} = \rho_{i,j}.\sigma_i.\sigma_i$ ainsi : les covariances entre les 3 titres A, B et C sont calculés comme suit :

$\sigma_{A,B} = 0{,}31 * 16\% * 27\% = 1{,}3392\%$;

$\sigma_{A,C} = 0{,}14 * 16\% * 3\% = 0{,}7840\%$;

$\sigma_{B,C} = 0{,}51 * 27\% * 3\% = 0{,}4{,}8195\%$

La matrice des variance-covariance : $\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 = 2{,}5600\% & \sigma_{A,B} = 1{,}3392\% & \sigma_{A,C} = 0{,}7840\% \\ \sigma_{B,A} = 1{,}3392\% & \sigma_B^2 = 7{,}2900\% & \sigma_{B,C} = 4{,}8195\% \\ \sigma_{C,A} = 0{,}7840\% & \sigma_{C,B} = 4{,}8195\% & \sigma_C^2 = 12{,}2500\% \end{pmatrix}$

La matrice inverse est alors la suivante (Voir l'énoncé) :

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 43{,}2367 & -8{,}2624 & 0{,}4835 \\ -8{,}2624 & 20{,}1185 & -7{,}3864 \\ 0{,}4835 & -7{,}3864 & 11{,}0383 \end{pmatrix}$$

le taux sans risque : $R_f = 5{,}5\%$ et la matrice unité $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Rappel du cours : Détermination de l'équation de la frontière d'efficience de portfeuilles de titres risqués

Un titre i est parfaitement défini par l'espérance de sa rentabilité $E(\tilde{R}_i)$ et son risque mesuré par l'écart-type de sa rentabilité $\sigma_i = \sqrt{\mathrm{var}(\tilde{R}_i)}$

Si on considère N titres, la matrice des variances et des covariances est une matrice diagonale d'ordre N et notée comme suit :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots\cdots & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & & \sigma_{2,N} \\ \sigma_{i,1} & & \sigma_i^2 & \sigma_{i,N} \\ \sigma_{N,1} & & \cdots\cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}_{(\text{N lignes;N colonnes})} \quad \text{où} \quad Cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) = \sigma_{i,j} \;\text{ et }\; \mathrm{var}(\tilde{R}_i) = \sigma_i^2$$

La matrice inverse $\Omega.^{-1}$ est une matrice composée par N lignes et N colonnes

$Les \;\; rentabilités \;\; E(\tilde{R}) = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ \cdots \\ E(R_N) \end{pmatrix}_{(N\ lignes;\ 1 colonne)}$ et la matrice unité $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{(N\ lignes;\ 1 colonne)}$

Un portefeuille P composé de N titres risqués est caractérisé par :

- Le vecteur colonne des proportions x_i investie dans les titres est donnée par :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_N \end{pmatrix}_{(\text{Nlignes};1\text{colonne})} \qquad avec \sum_1^N x_i = 1 \ ,$$

- L'espérance de sa rentabilité $E(R_P)$=

$$E(R_P) = X^T.E(R) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_N \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ \ldots\ldots. \\ E(R_N) \end{pmatrix}.$$

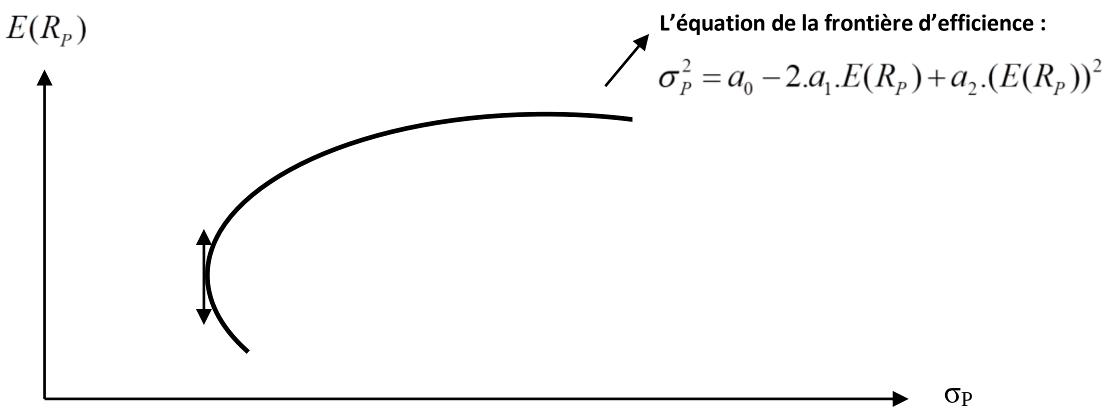
- La variance de sa rentabilité :

$$\sigma_P^2 = X^T.\Omega.X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_N \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \ldots\ldots.. & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & & \sigma_{2,N} \\ & & \sigma_i^2 & \\ \sigma_{N,1} & & \ldots\ldots... & \sigma_N^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots.. \\ x_i \\ x_N \end{pmatrix}.$$

-

L'ensemble des portefeuilles efficients de titres risqués dans un repère $(\sigma_P; E(R_P))$ est représenté comme suit :

-



L'équation de la frontière de portefeuille efficient d'actifs risqués est la suivante :

$$\sigma_P^2 = a_0 - 2.a_1.E(R_P) + a_2.(E(R_P))^2$$

$$\sigma_P^2 = a_2.(E(R_P))^2 - 2.a_1.E(R_P) + a_0 = \frac{A}{D}.(E(R_P))^2 - \frac{2*B}{D}.E(R_P) + \frac{C}{D}$$

$$\sigma_P^2 = a_2.(E(R_P))^2 - 2.a_1.E(R_P) + a_0 = \frac{A}{AC-B^2}.(E(R_P))^2 - \frac{2*B}{AC-B^2}.E(R_P) + \frac{C}{AC-B^2}$$

Les constantes A, B, C et D sont calculés comme suit :

$$\begin{Bmatrix} A = U^T.\Omega.^{-1}.U \\ B = R^T.\Omega.^{-1}.U \\ C = R^T.\Omega.^{-1}.R \\ D = A.C - B^2 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} a_0 = \frac{C}{D} \\ a_1 = \frac{B}{D} \\ a_2 = \frac{A}{D} \end{Bmatrix}$$

La matrice des constantes A,B,C et D peut-être notée comme suit : $H = \begin{pmatrix} C & B \\ B & A \end{pmatrix}$ et D = AC-B²

La matrice des coefficients peut-être notée $a = \begin{pmatrix} a_2 & -a_1 \\ -a_1 & a_0 \end{pmatrix}$ et calculée comme suit :

$$a = \begin{pmatrix} a_2 & -a_1 \\ -a_1 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A}{D} & \frac{-B}{D} \\ \frac{-B}{D} & \frac{C}{D} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \cdot \begin{pmatrix} A & -B \\ -B & C \end{pmatrix}$$

Ainsi la matrice des coefficients a est l'inverse de la matrice des constantes H : $a = H^{-1}$

Application au cas : Détermination de l'équation de la frontière d'efficience

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E(\tilde{R}) = R = \begin{pmatrix} E(R_A) = 7{,}5\% \\ E(R_B) = 11{,}5\% \\ E(R_C) == 15{,}85\% \end{pmatrix} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 2{,}5600\% & 1{,}3392\% & 0{,}7840\% \\ 1{,}3392\% & 7{,}2900\% & 4{,}8195\% \\ 0{,}7840\% & 4{,}8195\% & 12{,}2500\% \end{pmatrix} \quad \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 43{,}2367 & -8{,}2624 & 0{,}4835 \\ -8{,}2624 & 20{,}1185 & -7{,}3864 \\ 0{,}4835 & -7{,}3864 & 11{,}0383 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A = U^T.\Omega^{-1}.U \\ B = R^T.\Omega^{-1}.U \\ C = R^T.\Omega^{-1}.R \\ D = A.C - B^2 \end{cases}$$

$$U^T.\Omega^{-1} = (1 \quad 1 \quad 1).\begin{pmatrix} 43{,}2367 & -8{,}2624 & 0{,}4835 \\ -8{,}2624 & 20{,}1185 & -7{,}3864 \\ 0{,}4835 & -7{,}3864 & 11{,}0383 \end{pmatrix} = (35{,}46 \quad 4{,}47 \quad 4{,}14)$$

$$R^T.\Omega^{-1} = (7{,}5\% \quad 11{,}5\% \quad 15{,}85\%).\begin{pmatrix} 43{,}2367 & -8{,}2624 & 0{,}4835 \\ -8{,}2624 & 20{,}1185 & -7{,}3864 \\ 0{,}4835 & -7{,}3864 & 11{,}0383 \end{pmatrix} = (2{,}3691 \quad 0{,}5232 \quad 0{,}9364)$$

$$A = U^T.\Omega^{-1}.U = (1 \quad 1 \quad 1).\begin{pmatrix} 43{,}2367 & -8{,}2624 & 0{,}4835 \\ -8{,}2624 & 20{,}1185 & -7{,}3864 \\ 0{,}4835 & -7{,}3864 & 11{,}0383 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (35{,}46 \quad 4{,}47 \quad 4{,}14).\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 44{,}0629$$

$$B = R^T.\Omega^{-1}.U = (7{,}5\% \quad 11{,}5\% \quad 15{,}85\%).\begin{pmatrix} 43{,}2367 & -8{,}2624 & 0{,}4835 \\ -8{,}2624 & 20{,}1185 & -7{,}3864 \\ 0{,}4835 & -7{,}3864 & 11{,}0383 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (2{,}3691 \quad 0{,}5232 \quad 0{,}9364).\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3{,}8288$$

$$C = R^T.\Omega^{-1}.R = (7{,}5\% \quad 11{,}5\% \quad 15{,}85\%).\begin{pmatrix} 43{,}2367 & -8{,}2624 & 0{,}4835 \\ -8{,}2624 & 20{,}1185 & -7{,}3864 \\ 0{,}4835 & -7{,}3864 & 11{,}0383 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 7{,}5\% \\ 11{,}5\% \\ 15{,}85\% \end{pmatrix}$$

$$= (2{,}3691 \quad 0{,}5232 \quad 0{,}9364).\begin{pmatrix} 7{,}5\% \\ 11{,}5\% \\ 15{,}85\% \end{pmatrix} = 0{,}3863$$

$$D = A.C - B^2 = (44{,}0629 * 0{,}3863) - (3{,}8288)^2 = 2{,}36075$$

$$\begin{Bmatrix} A = U^T.\,\Omega.^{-1}.\,U = 44{,}0629 \\ B = R^T.\,\Omega.^{-1}.\,U = 3{,}8288 \\ C = R^T.\,\Omega.^{-1}.\,R = 0{,}3863 \\ D = A.C - B^2 \;\; = 2{,}36075 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} a_0 = \frac{0{,}3863}{2{,}36075} \\ a_1 = \frac{3{,}8288}{2{,}36075} \\ a_2 = \frac{44{,}0629}{2{,}36075} \end{Bmatrix}$$

La matrice des constantes A,B,C et D peut-être notée comme suit : $H = \begin{pmatrix} C = 0{,}3863 & B = 3{,}8288 \\ B = 3{,}8288 & A = 44{,}0629 \end{pmatrix}$ et D =2,36075

La matrice des coefficients peut-être notée $a = \begin{pmatrix} a_2 & -a_1 \\ -a_1 & a_1 \end{pmatrix}$ et calculée comme suit :

$$a = \begin{pmatrix} a_2 & -a_1 \\ -a_1 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A}{D} & \frac{-B}{D} \\ \frac{-B}{D} & \frac{C}{D} \end{pmatrix} = \frac{1}{D}.\begin{pmatrix} A & -B \\ -B & C \end{pmatrix} = \frac{1}{2{,}36075}.\begin{pmatrix} 44{,}0629 & -3{,}8288 \\ -3{,}8288 & 0{,}3863 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18{,}6648 & -1{,}6219 \\ -1{,}6219 & 0{,}1636 \end{pmatrix}$$

Ainsi la matrice des coefficients a est l'inverse de la matrice des constantes H : $a = H^{-1}$

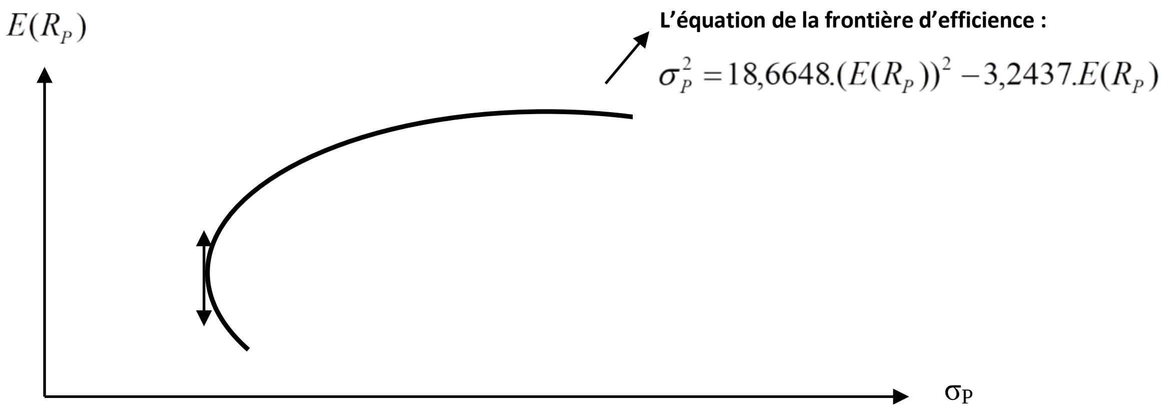
$$\sigma_P^2 = a_2.(E(R_P))^2 - 2.a_1.E(R_P) + a_0 = \frac{A}{D}.(E(R_P))^2 - \frac{2*B}{D}.E(R_P) + \frac{C}{D}$$

$$a_2 = \frac{A}{D} = \frac{44{,}0629}{2{,}36075} = 18{,}6648 \;; \quad a_1 = \frac{B}{D} = \frac{3{,}8288}{2{,}36075} = 1{,}6219 \quad et \quad a_0 = \frac{C}{D} = 0{,}1636$$

$$\sigma_P^2 = a_2.(E(R_P))^2 - 2.a_1.E(R_P) + a_0 = 18{,}6648.(E(R_P))^2 - 3{,}2437.E(R_P) + 0{,}1636$$

C'est l'ensemble des portefeuilles efficients composés par les 3 actifs risqués A, B et C.

L'ensemble des portefeuilles efficients de titres risqués (les titres A,B et C) dans un repère $(\sigma_P; E(R_P))$ est représenté comme suit :



Suite du rappel du cours : Détermination de la compostion d'un portefeuille P de titres risqués appartenant à la frontière d'efficience

L'ensemble des portefeuilles efficients de titres risqués dans un repère $(\sigma_P; E(R_P))$ est représenté comme suit :

$$\sigma_P^2 = a_0 - 2.a_1.E(R_P) + a_2.(E(R_P))^2$$

La composition (les x_i) d'un portefeuille constitué par N actifs risqués appartenant à cette frontière est donnée par la formule suivante : La détermination de la matrice des proportions X d'un portefeuille P suppose que l'espérance de ce portefeuille est connue :

Soit :

- la rentabilité d'un portefeuille de titres risqués $E(R_P)$ connu ;
- la matrice inverse des variances covariance connu : $\Omega.^{-1}$ (une matrice lignes, N colonnes)
- les coefficients de l'équation de la frontière d'efficience de titres risqués connu

$$\sigma_P^2 = a_0 - 2.a_1.E(R_P) + a_2.(E(R_P))^2$$

La matrice des coeficients peut-être designé comme suit : $a = \begin{pmatrix} a_2 & -a_1 \\ -a_1 & a_0 \end{pmatrix}_{(2 lignes; 2 colonnes)}$

Et La matrice des constantes A,B,C et D peut-être notée comme suit : $H = \begin{pmatrix} C & B \\ B & A \end{pmatrix}$ et D = AC-B²

- La matrice des rentabilités des titres risqués connu : $Les \quad rentabilités \quad E(\tilde{R}) = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ .... \\ E(R_N) \end{pmatrix}_{(N\ lignes;\ 1 colonne)}$

- La matrice : $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{(N\ lignes;\ 1 colonne)}$

- $La \quad matricce \quad [E(\tilde{R}); U] = \begin{pmatrix} E(R_1) & 1 \\ .... & 1 \\ E(R_N) & 1 \end{pmatrix}_{(N\ lignes;\ 2 colonnes)}$ $\quad et \quad la \quad matricce \quad [E(\tilde{R}_P); 1] = \begin{pmatrix} E(R_P) \\ 1 \end{pmatrix}_{(2 lignes;\ 1 colonne)}$

La composition $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ .... \\ x_N \end{pmatrix}$ du portefeuille P ayant une rentabilité $E(R_P)$ connu est donné par l'équation suivante :

$$X_{(N,1)} = \Omega^{-1}_{(N,N)} * [E(\tilde{R}); U]_{(N,2)} * a_{(2,2)} * [E(\tilde{R}_P); 1]_{(2,1)}$$

$$la \quad composition \quad X_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_N \end{pmatrix} = \Omega^{-1} * \begin{pmatrix} E(R_1) & 1 \\ E(R_i) & 1 \\ E(R_N) & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2 & -a_1 \\ -a_1 & a_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} E(R_P) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Application au cas[1] :

$$U=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}_{(3lignes;1colonne)}\qquad E(\tilde{R})=R=\begin{pmatrix}E(R_A)=7{,}5\%\\E(R_B)=11{,}5\%\\E(R_C)==15{,}85\%\end{pmatrix}_{(3lignes;1colonne)}\qquad \text{la matrice}:[\mathrm{E(R)};\mathrm{U}]=\begin{pmatrix}7{,}5\% & 1\\11{,}5\% & 1\\15{,}85\% & 1\end{pmatrix}_{(3,2)}$$

$$\Omega^{-1}=\begin{pmatrix}43{,}2367 & -8{,}2624 & 0{,}4835\\-8{,}2624 & 20{,}1185 & -7{,}3864\\0{,}4835 & -7{,}3864 & 11{,}0383\end{pmatrix}_{(3;3)}$$

$$\begin{Bmatrix}A=U^T.\,\Omega.^{-1}.\,U=44{,}0629\\B=R^T.\,\Omega.^{-1}.\,U=3{,}8288\\C=R^T.\,\Omega.^{-1}.\,R=0{,}3863\\D=A.C-B^2\quad=2{,}36075\end{Bmatrix}\qquad\begin{Bmatrix}a_0=\frac{0{,}3863}{2{,}36075}\\a_1=\frac{3{,}8288}{2{,}36075}\\a_2=\frac{44{,}0629}{2{,}36075}\end{Bmatrix}$$

La matrice des constantes A,B,C et D peut-être notée H comme suit :

$$H=\begin{pmatrix}C=0{,}3863 & B=3{,}8288\\B=3{,}8288 & A=44{,}0629\end{pmatrix}_{(2;2)}$$ et D =2,36075

La matrice des coefficients peut-être notée :

$$a=\begin{pmatrix}a_2 & -a_1\\-a_1 & a_0\end{pmatrix}_{(2;2)}=\begin{pmatrix}18{,}6648 & -1{,}6219\\-1{,}6219 & 0{,}1636\end{pmatrix}$$ avec $a=H^{-1}$

L'équation de la frontière de portefeuilles efficients est donnée par :

$$\sigma_P^2=a_2.(E(R_P))^2-2.a_1.E(R_P)+a_0=18{,}6648.(E(R_P))^2-3{,}2437.E(R_P)+0{,}1636$$

Sachant un portefeuille P ayant une rentabilité espéré E(R_P)=15% on a : $\text{la matrice}:[\mathrm{E(R_P)};1]=\begin{pmatrix}15\%\\1\end{pmatrix}_{(2;1)}$

P est un portefeuille composé par les trois actifs risqués A, B et C et appartenant à la frontière d'efficience a une composition X calculée comme suit

$$X_{(3,1)}=\Omega^{-1}_{(3,3)}*\left[E(\tilde{R});U\right]_{(3,2)}*a_{(2,2)}*\left[E(\tilde{R}_P);1\right]_{(2,1)}$$

$$la\quad composition\quad X_P=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\Omega^{-1}_{(3;3)}*.\begin{pmatrix}E(R_1) & 1\\E(R_2) & 1\\E(R_3) & 1\end{pmatrix}_{(3;2)}*\begin{pmatrix}a_2 & -a_1\\-a_1 & a_0\end{pmatrix}_{(2;2)}*\begin{pmatrix}E(R_P)\\1\end{pmatrix}_{(2;1)}$$

[1] Cette question n'a pas été posée dans l'examen de la session de Mars 2017. La rentabilité de 15% proposée est arbitraire.

$$la \quad composition \quad X_P = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 43{,}2367 & -8{,}2624 & 0{,}4835 \\ -8{,}2624 & 20{,}1185 & -7{,}3864 \\ 0{,}4835 & -7{,}3864 & 11{,}0383 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7{,}5\% & 1 \\ 11{,}5\% & 1 \\ 15{,}85\% & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2{,}3691 & 35{,}4578 \\ 0{,}5232 & 4{,}4697 \\ 0{,}9363 & 4{,}1354 \end{pmatrix}} * \begin{pmatrix} 18{,}6648 & -1{,}6219 \\ -1{,}6219 & 0{,}1636 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 15\% \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$la \quad composition \quad X_P = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}3691 & 35{,}4578 \\ 0{,}5232 & 4{,}4697 \\ 0{,}9363 & 4{,}1354 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 18{,}6648 & -1{,}6219 \\ -1{,}6219 & 0{,}1636 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 15\% \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$la \quad composition \quad X_P = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13{,}2808 & 1{,}9587 \\ 2{,}5151 & 0{,}1171 \\ 10{,}7658 & 0{,}8416 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 15\% \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}34\% \\ 26{,}02\% \\ 77{,}32\% \end{pmatrix}$$

Afin de calculer la variance de ce portefeuille P deux méthodes sont possibles :

- Méthode 1 : L'équation de la frontière en rempaçant dans l'équation $E(R_P)$ par 15% :

$$\sigma_P^2 = 18{,}6648.(E(R_P))^2 - 3{,}2437.E(R_P) + 0{,}1636 = 18{,}6648.(15\%)^2 - 3{,}2437.*15\% + 0{,}1636 = 9{,}699\%$$

- Méthode 2 : calculer la variance en utilisant les formules habituelles :

$$\sigma_P^2 = X^T.\Omega.X = \begin{pmatrix} -3{,}34\% & 26{,}02\% & 77{,}32\% \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2{,}5600\% & 1{,}3392\% & 0{,}7840\% \\ 1{,}3392\% & 7{,}2900\% & 4{,}8195\% \\ 0{,}7840\% & 4{,}8195\% & 12{,}2500\% \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3{,}34\% \\ 26{,}02\% \\ 77{,}32\% \end{pmatrix} = 9{,}699\%$$

Suite du rappel du cours : Détermination des caractéristiques portefeuille P de titres risqués à variance minimale

L'ensemble des portefeuilles efficients de titres risqués dans un repère $(\sigma_P; E(R_P))$ est représenté comme suit :

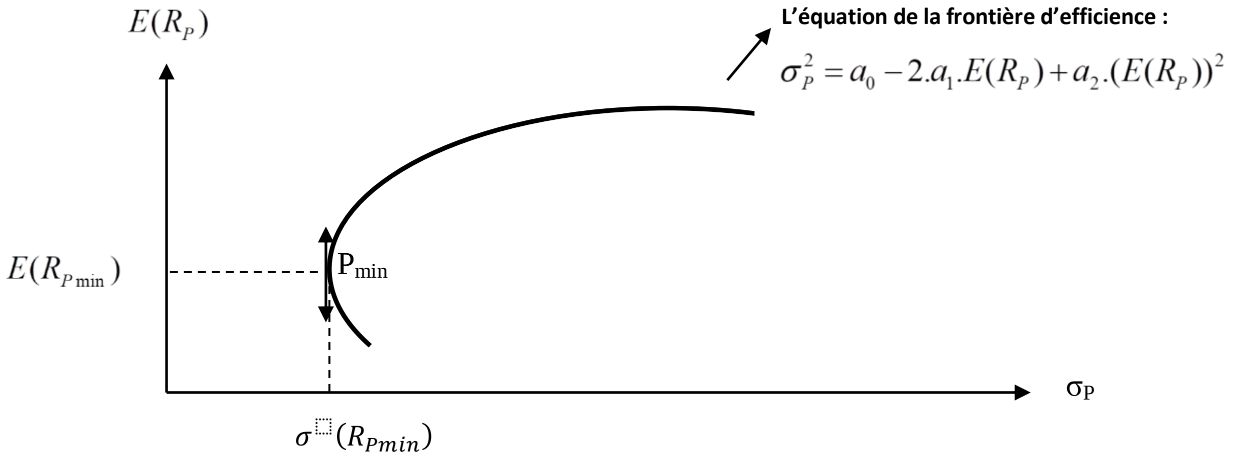
L'équation de la frontière de portefeuille efficient d'actifs risqués est la suivante :

$$\sigma_P^2 = a_0 - 2.a_1.E(R_P) + a_2.(E(R_P))^2$$

$$\sigma_P^2 = a_2.(E(R_P))^2 - 2.a_1.E(R_P) + a_0 = \frac{A}{D}.(E(R_P))^2 - \frac{2*B}{D}.E(R_P) + \frac{C}{D}$$

Avec : Les constantes A, B, C et D sont calculés comme suit :

$$\begin{Bmatrix} A = U^T.\Omega.^{-1}.U \\ B = R^T.\Omega.^{-1}.U \\ C = R^T.\Omega.^{-1}.R \\ D = A.C - B^2 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} a_0 = \frac{C}{D} \\ a_1 = \frac{B}{D} \\ a_2 = \frac{A}{D} \end{Bmatrix}$$



L'espérance du portefeuille à variance minimale est obtenue comme suit : $\dfrac{\partial \sigma_P^2}{\partial E(R_P)} = 0$

$$\sigma_P^2 = a_0 - 2.a_1.E(R_P) + a_2.(E(R_P))^2$$

$$\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial E(R_P)} = 2.a_2.E(R_P) - 2.a_1 = 0 \quad \text{d'où} \quad E(R_{P\min}) = \frac{a_1}{a_2} = \frac{B/D}{A/D} = \frac{B}{A}$$

Ce portefeuille appartient la courbe et sa variance : $\sigma_{P\min}^2 = a_0 - 2.a_1.E(R_{P\min}) + a_2.(E(R_{P\min}))^2 = \dfrac{1}{A}$

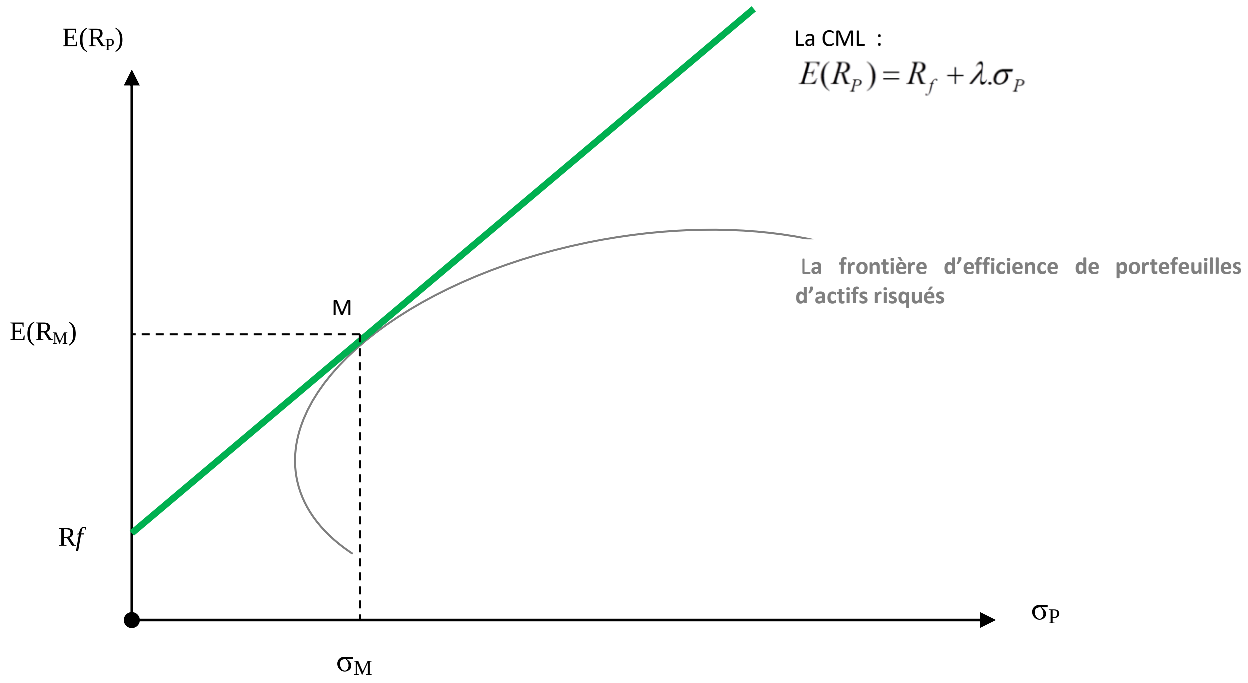
Les proportions x_i du portefeuille à variance minimale sont obtenues comme suit : $X_{min} = \frac{1}{A}.\,\Omega^{-1}.\,U$

<u>Résumé :</u> les caractéristiques du portfeuille de titres risqués à variance minimale[2]

$E(R_{Pmin}) = \frac{B}{A}$ $\sigma^2(R_{Pmin}) = \frac{1}{A}$ $X_{min} = \frac{1}{A}.\,\Omega^{-1}.\,U$

[2] Sachant les proportions X_{min} du portefeuille à variance minimale, il est possible d'obtenir l'espérance et la variance en appliquant les formules habituelles de calcul $E(R_P) = X^T.E(R)$ $\sigma_P^2 = X^T.\Omega.X$

Question 1 : a- le portefeuille du marché M



Tous les investisseurs sur le marché choisiront le portefeuille M de titres risqués placé sur la tangente entre la frontière efficiente de titres risqués et la droite passant par R*f,* c'est le portefeuille du marché.

Les caractéristiques de ce portefeuille M :

Les proportions :

$$X_M = \left(\frac{1}{U^T.\Omega^{-1}.(R-R_f.U)}\right).\Omega^{-1}.(R-R_f.U) = \left(\frac{1}{B-A.R_f}\right).\left[\Omega^{-1}.(R-R_f.U)\right]$$

$$\left[\Omega^{-1}.(R-R_f.U)\right] = \begin{vmatrix} 43{,}2367 & -8{,}2624 & 0{,}4835 \\ -8{,}2624 & 20{,}1185 & -7{,}3864 \\ 0{,}4835 & -7{,}3864 & 11{,}0383 \end{vmatrix}.\begin{pmatrix} 2\% \\ 6\% \\ 10{,}35\% \end{pmatrix} =.\begin{pmatrix} 0{,}4190 \\ 0{,}2774 \\ 0{,}7090 \end{pmatrix}$$

$$U^T.\left[\Omega^{-1}.(R-R_f.U)\right] = (1 \quad 1 \quad 1).\begin{pmatrix} 0{,}4190 \\ 0{,}2774 \\ 0{,}7090 \end{pmatrix} = 1{,}405 = \mathrm{B} - \mathrm{A}.\mathrm{R_f} = 3{,}8288 - (44{,}0629 * 5{,}5\%)$$

$$U^T.\left[\Omega^{-1}.(R-R_f.U)\right] = \mathrm{B} - \mathrm{A}.\mathrm{R_f} = 3{,}8288 - (44{,}0629 * 5{,}5\%) = 1{,}405$$

$$X_M = \left(\frac{1}{U^T.\Omega^{-1}.(R-R_f.U)}\right).\Omega^{-1}.(R-R_f.U) = \left(\frac{1}{1{,}405}\right).\begin{pmatrix} 0{,}4190 \\ 0{,}2774 \\ 0{,}7090 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29{,}8169\% \\ 19{,}7366\% \\ 50{,}4466\% \end{pmatrix}$$

L'espérance du portfeuille M :

Méthode 1 : $E(R_M) = \dfrac{R^T.\Omega^{-1}.(R-R_f.U)}{U^T.\Omega^{-1}.(R-R_f.U)}$ $\qquad U^T.\left[\Omega^{-1}.(R-R_f.U)\right] = 1{,}405$

$$R^T.\left[\Omega^{-1}.(R-R_f.U)\right] = (7{,}5\% \quad 11{,}5\% \quad 15{,}85\%).\begin{pmatrix} 0{,}4190 \\ 0{,}2774 \\ 0{,}7090 \end{pmatrix} = 17{,}57\%$$

$$E(R_M) = \frac{17{,}57\%}{1{,}405} = 12{,}5\%$$

Méthode 2 : $E(R_M) = \frac{c - B.R_f}{B - A.R_f} = \frac{0{,}3863 - 3{,}8288*5{,}5\%}{3{,}8288 - 44{,}0629*5{,}5\%} = 12{,}5\%$

Méthode 3 : $E(R_M) = \frac{a_0 - a_1.R_f}{a_1 - a_2.R_f} = \frac{0{,}1636 - 1{,}6219*5{,}5\%}{1{,}6219 - 18{,}6648*5{,}5\%} = 12{,}5\%$

Méthode 4 :

$$X_M = \begin{pmatrix} 29{,}8169\% \\ 19{,}7366\% \\ 50{,}4466\% \end{pmatrix} \quad ; \quad E(\tilde{R}) = \begin{pmatrix} 7{,}5\% \\ 11{,}5\% \\ 15{,}85\% \end{pmatrix}$$

$$E(R_M) = X^T.E(R) = \begin{pmatrix} 29{,}8169\% & 19{,}7366\% & 50{,}4466\% \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 7{,}5\% \\ 11{,}5\% \\ 15{,}85\% \end{pmatrix} = 12{,}5\%$$

$$E(R_M) = \sum_{i=1}^{3} x_i.E(R_i) = 29{,}8169\% * 7{,}5\% + 19{,}7366 * 11{,}5\% + 50{,}4466\% * 15{,}85\% = 12{,}5\%$$

La variance du portefeuille M :

Méthode 1 : $\sigma_M^2 = \frac{(R - R_f.U)^T.\Omega.^{-1}.(R - R_f.U)}{\left[U^T.\Omega.^{-1}.(R - R_f.U)\right]^2}$

$$\left[\Omega.^{-1}.\left(R - R_f.U\right)\right] = .\begin{pmatrix} 0{,}4190 \\ 0{,}2774 \\ 0{,}7090 \end{pmatrix} \qquad U^T.\left[\Omega.^{-1}.\left(R - R_f.U\right)\right] = 1{,}405$$

$$\left(R - R_f.U\right)^T.\Omega.^{-1}.\left(R - R_f.U\right) = (2\% \quad 6\% \quad 10{,}85\%).\begin{pmatrix} 0{,}4190 \\ 0{,}2774 \\ 0{,}7090 \end{pmatrix} = 9{,}84\%$$

$$\sigma_M^2 = \frac{(R - R_f.U)^T.\Omega.^{-1}.(R - R_f.U)}{\left[U^T.\Omega.^{-1}.(R - R_f.U)\right]^2} = \frac{9{,}84\%}{(1{,}405)^2} = 4{,}98\%$$

Méthode 2 :

$$\sigma_P^2 = X^T.\Omega.X$$

$$\sigma_M^2 = \begin{pmatrix} 29{,}8169\% & 19{,}7366\% & 50{,}4466\% \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 2{,}5600\% & 1{,}3392\% & 0{,}7840\% \\ 1{,}3392\% & 7{,}2900\% & 4{,}8195\% \\ 0{,}7840\% & 4{,}8195\% & 12{,}2500\% \end{pmatrix}.. \begin{pmatrix} 29{,}8169\% \\ 19{,}7366\% \\ 50{,}4466\% \end{pmatrix} = 4{,}98\%$$

$$\sigma_P^2 = x_A^2.\sigma_A^2 + x_B^2.\sigma_B^2 + x_C^2.\sigma_C^2 + 2.x_A.x_B.\sigma_{A,B} + 2.2.x_A.x_C.\sigma_{A,C} + x_B.x_C.\sigma_{B,C} = 4{,}98\%$$

Question 1 : b- DMC

L'équation de la droite CML : $E\left(R_p\right) = R_f + \left(\frac{E\left(R_M\right) - R_f}{\sigma_M}\right)\sigma_p$, la pente de la droite $\lambda = \left(\frac{E\left(R_M\right) - R_f}{\sigma_M}\right)$

Les portefeuilles appartenant à cette droite, la CML, sont efficients et sont composés par :

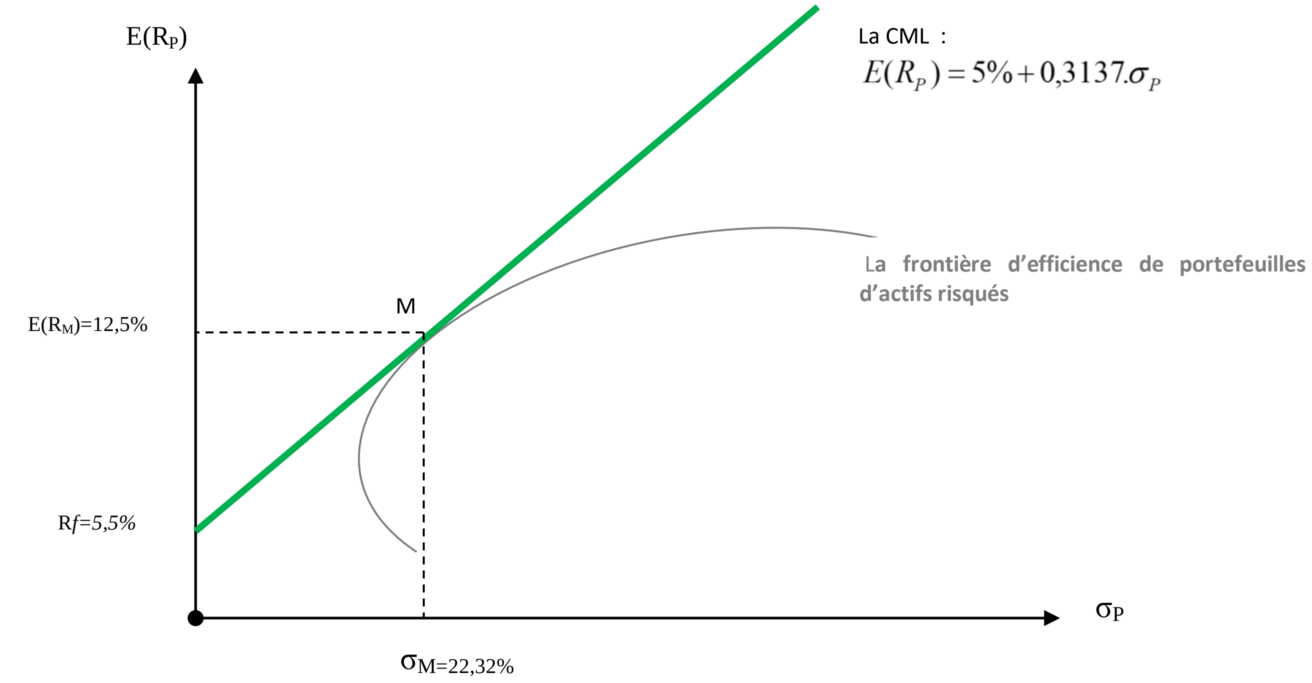
(1) Une proportion x_M est investie dans le portefeuille de marché M;

(2) Une proportion xf dans l'actif sans risque.

La rentabilité des portefeuilles de la CML : $\tilde{R}_P = x_M.\tilde{R}_M + x_f.R_f$ avec $x_M + x_f = 1$

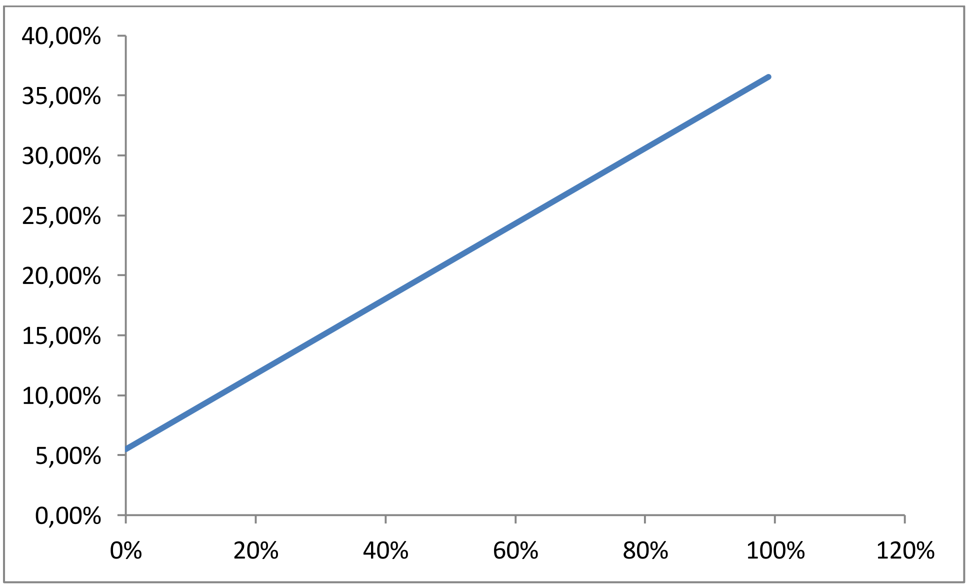
La rentabilité espérée d'un portefeuille P efficient appartenant à la CML : $E(\tilde{R}_P) = x_M.E(\tilde{R}_M) + x_f.R_f$

Le risque d'un portefeuille P appartenant à la CML : $\sigma_P = x_M.\sigma_M$



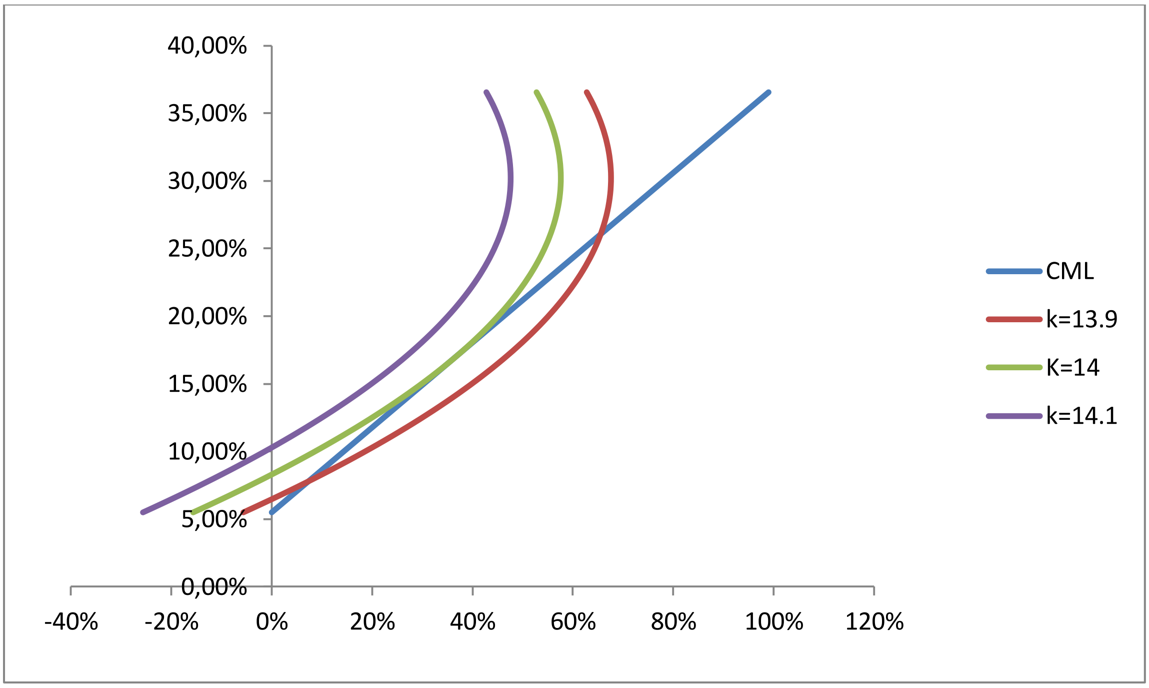
L'équation de la droite CML : $E(R_p) = 5\% + \left(\frac{12{,}5\% - 5{,}5\%}{\sqrt{4{,}98\%}}\right).\sigma_p = 5\% + 0{,}3137.\sigma_p$, la pente de la droite $\lambda = 0{,}3137$

risque	19%	21%	23%	25%	27%	29%	31%	33%	35%	37%
rentabilité	11,46%	12,09%	12,72%	13,34%	13,97%	14,60%	15,22%	15,85%	16,48%	17,11%



Les courbes d'indifférence :

$$\sigma_P = -12.(E(R_P))^2 + 7{,}25.E(R_P) + (13{,}481 - k)$$



La courbe d'indifférence tangente à la CML est tel que k =14 ; $\sigma_P = -12.(E(R_P))^2 + 7{,}25.E(R_P) + (13{,}481 - 14)$

Le portefeuille <u>optimal</u> est celui qui maximise l'utilité de l'investisseur. Il est tangent à la frontière de portefeuilles efficients (la droite CML) et appartient à l'une des courbes d'indifférence. Il vérifie alors les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_P = -12.(E(R_P))^2 + 7{,}25.E(R_P) + (13{,}481 - 14) \\ E(R_p) = 5\% + 0{,}3137.\sigma_P \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_P}{\partial E(R_p)} = -24.E(R_p) + 7{,}25 \\ \dfrac{\partial \sigma_P}{\partial E(R_p)} = 3{,}31877 \end{cases} \qquad -24.E(R_p) + 7{,}25 = 3{,}31877 \qquad E(R_P) = 16{,}38\%$$