S.N°1 : STATISTIQUES (Toutes Sections)

Mr. FATNASSI BECHIR

EXO. N°1 : (Enoncé)

Le tableau suivant donne la distance de freinage **d** (en mètres) d'une voiture, en fonction de sa vitesse **v** (en kilomètres par heure)

v (km/h)	30	40	50	60	70	80
d (mètres)	42	60	80	90	95	110

On note $\overline{v}$ et $\overline{d}$ les moyennes respectives de v et d.

On note V (v) et V (d) les variances respectives de v et d.

On note $\text{cov}(v,d)$ la covariance de v et d.

1°/ Calculer $\overline{v}$, $\overline{d}$ et $V(v)$, $V(d)$ et $\text{cov}(v,d)$

2°/ a / Calculer le coefficient de corrélation entre v et d.

b / Y a-t-il forte corrélation entre v et d ? Justifier.

3°/ Soit Δ la droite de régression de d en v.

a / Ecrire une équation cartésienne de Δ par la méthode des moindres carrés.

b / Calculer la distance de freinage lorsque la voiture roule à 100 km/h.

c / La vitesse de la voiture est de 140 km/h, lorsque le conducteur, roulant suivant une ligne droite, aperçoit un obstacle situé à une distance de 200 mètres.

Pourrait-il alors éviter cet obstacle sachant qu'il met une seconde pour appuyer sur les freins ?

4°/ Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine (D) de d en v par la méthode de Mayer.

EXO. n°2 : (Enoncé)

Les tailles x_i en centimètres et les masses y_i en kilogrammes de douze élèves sont données par le tableau :

x_i	175	160	182	154	167	175	185	165	158	164	162	170
y_i	72	66	85	50	63	80	78	68	52	68	58	70

1°/ Représenter graphiquement cette série statistique dans un repère orthogonal

2°/ Calculer la moyenne arithmétique , la variance et l'écart type de chacun des deux caractères : X et Y

3°/ a / Calculer la covariance du couple (X,Y)

b / Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y et interpréter le résultat obtenu

4°/ Ecrire une équation de chacune des deux droites de régressions par la méthode des moindres carrés.

EXO. n°1 : (Solution)

1°/ $*$ Les moyennes arithmétiques sont : $\overline{v}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}v_i=55$; $\overline{d}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}d_i=79,5$

$*$ Les variances sont : $V(v)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}v_i^2-\left(\overline{v}\right)^2=291,66$; $V(d)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}d_i^2-\left(\overline{d}\right)^2=511,25$

$*$ La covariance du couple (v,d) est :

$$\operatorname{cov}(v,d)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}v_id_i-\overline{v}.\overline{d}=\overline{vd}-\overline{v}.\overline{d}=\frac{28510}{6}-55\times 79,5=379,166$$

2°/ a / $*$ Le coefficient de corrélation du couple (v,d) est : $r=\frac{\operatorname{cov}(v,d)}{\sigma_v\sigma_d}=0,9819$

b / $*$ Comme $r_{(v,d)}$ est proche de **1** **Donc :** La corrélation linéaire entre la distance de freinage d et la vitesse v de la voiture est très forte $\left(0,95<\left|r_{(v,d)}\right|=|0,98|<1\right)$

$*$ Dans ce cas les droites de régressions permettent une bonne estimation de d en fonction de v ou de v en fonction de d .On en déduit que l'une des deux variables peut être approchées par une fonction affine de l'autre.

3°/ a / $*$ La droite de régression (Δ) de d en v est :

$$(\Delta): d=av+b \quad \text{avec} \quad a=\frac{\operatorname{cov}(v,d)}{V_v}=r\frac{\sigma_d}{\sigma_v}=1,3 \ \text{ et } \ b=\overline{d}-a\overline{v}=8 \ \textbf{ Soit } \ (\Delta): d=1,3v+8$$

b / La distance de freinage à prévoir pour une vitesse de $100\ \mathrm{km/h}$: Dans l'équation de la droite $(\Delta): d=1,3v+8$ on remplace v par 100 on trouve alors $d=138\ \ m$

c / Pour une vitesse de 140 km /h la distance de freinage est $d=1,3\times 140+8=190\ m$

Le conducteur met une seconde pour appuyer sur les freins .Pendant cette seconde le conducteur parcourt une distance : $d'=\frac{140000}{36000}=38,38\ m$

Avant de s'arrêter le conducteur doit parcourir $d+d'=190+38,88=228,88$

Donc il ne peut pas éviter l'obstacle qui se trouve à 200 m de la voiture.

4°/ La méthode de Mayer consiste à diviser le nuage de points en deux parties : la première comporte les $\frac{n}{2}$ premiers points si n est pair (et les $\frac{n+1}{2}$ si n impair) ; la deuxième partie comporte le reste des points. Dans cet exercice $n=6$ un entier pair et $\frac{n}{2}=3$

Soit $G_1\left(\overline{X_1}\ ,\ \overline{Y_1}\right)$ le point moyen de la première partie avec $\overline{X_1}$ et $\overline{Y_1}$ les moyennes arithmétiques des $\frac{n}{2}$ premiers points : $\overline{X_1}=\frac{30+40+50}{3}=40$ et $\overline{Y_1}=\frac{42+60+80}{3}=60,67$

Donc : $G_1(40\ \ ;\ \ 60,67)$

Soit $G_2\left(\overline{X_2}\ ,\ \overline{Y_2}\right)$ le point moyen de la première partie avec $\overline{X_1}$ et $\overline{Y_1}$ les moyennes arithmétiques des $\frac{n}{2}$ deniers points : $\overline{X_2}=\frac{60+70+80}{3}=70$ et $\overline{Y_2}=\frac{90+95+110}{3}=98,33$

Donc : $G_2(70\ ;\ 98,33)$

La droite de Mayer est $D = (G_1G_2) :\ y = ax + b$ avec $a = \dfrac{\overline{Y_2} - \overline{Y_1}}{\overline{X_2} - \overline{X_1}} = \dfrac{98,33 - 60,67}{70 - 40} = 1,26$

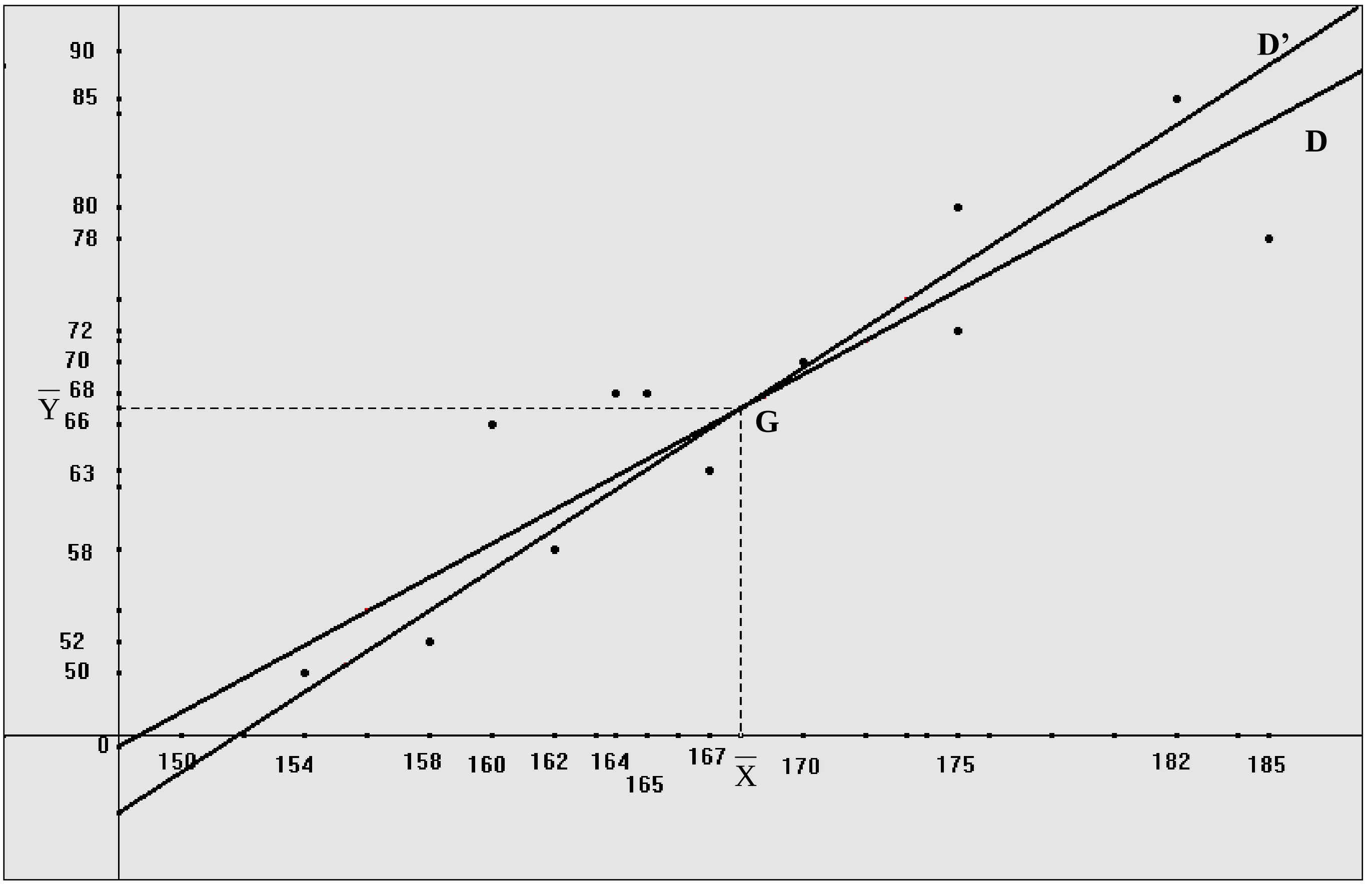
Et $b = \overline{Y_1} - a\overline{X_1} = 60,67 - 1,26 \times 40 = 10.27$

Conclusion : $D = (G_1G_2) :\ y = 1,26\,x + 10,27$

$d = 1,26\,v + 10,27$

EXO. n°2 : (Solution)

1°/ Le nuage du couple (X, Y) est représenté par le graphique suivant :



* Le nuage présente une forme allongée . On est souvent amené à déterminer les droites d'ajustement linéaire appelées droites de régressions .

Les droites de régressions passent par le point moyen $G(\overline{X}, \overline{Y})$

2°/ On a :

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 2017 \ ;\ \sum_{i=1}^{12} (x_i)^2 = 340033 \ ;\ \sum_{i=1}^{12} y_i = 810 \ ;\ \sum_{i=1}^{12} (y_i)^2 = 55934 \ ;\ \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 137165$$

IL en résulte : * Les moyennes arithmétiques sont : $\overline{X} = \dfrac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = 168,08$; $\overline{Y} = \dfrac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} y_i = 67,50$

* Les variances sont : $V(X) = \dfrac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i^2 - (\overline{X})^2 = 84,076$; $V(Y) = \dfrac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} y_i^2 - (\overline{Y})^2 = 104,91$

* Les écarts types sont : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 9,17$; $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = 10,243$

3°/ a / $*$ La covariance du couple (X,Y) est : $\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i y_i - \overline{X}.\overline{Y} = 84,79$

b / $*$ Le coefficient de corrélation du couple (X,Y) est : $r=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}=0,90$

$0,75<|r|\leq 0,95$ **Donc :** La corrélation linéaire entre la taille et la masse est **forte** et par suite l'ajustement affine entre X et Y est justifié.

$*$ Dans ce cas les droites de régressions permettent une bonne estimation de Y en fonction de X ou de X en fonction de Y. On en déduit que l'une des deux variables peut être approchées par une fonction affine de l'autre.

4°/ $*$ La droite de régression de y en x est : $D: y-\overline{Y}=a\left(x-\overline{X}\right)$ avec $a=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V_x}=1,0085$

$D: y-67,50=1,0085(x-168,08)$ Soit : $D: y=1,0085x-102,01$

$*$ La droite de régression de x en y est : $D': x-\overline{X}=a'\left(y-\overline{Y}\right)$ avec $a'=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V_y}=0,81$

$D': x-168,08=0,81(y-67,50)$ Soit : $D': x=0,81y+113,41$

$*$ On peut aussi définir les droites D et D' par : $D: y=ax+b$ avec $a=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V_x}$ et $b=\overline{Y}-a\overline{X}$

$D': x=a'y+b'$ avec $a'=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V_y}$ et $b'=\overline{X}-a'\overline{Y}$

$*$ Le coefficient de corrélation linéaire : $r=\sqrt{a.a'}$

Prof. Mr. FATNASSI BECHIR

LYCEE SECONDAIRE DE KORBA

FATNASSI BECHIR