LYCEE PILOTE BAYREM 5
EL MENZAH 8

M.LAKHDAR

DEVOIR DE CONTRÔLE2

EPREUVE : MATHEMATIQUES 1S3-7

Durée : 1h | Date : 19 / 11/ 2021

EXERCICE 1 5 pts

Les questions sont indépendantes

1. Comparer **A** et **B** sachant que :

$A = 2021(1+2+3+\dots\dots\dots+2022)$ et $B = 2022(1+2+3+\dots\dots\dots+2021)$

2. ABCD un trapèze tels que $(AB)\perp(AD)$ et $(DC)\perp(AD)$. **E** et **F** les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$ et soit **G** le point d'intersection des droite (EF) et (BD) .

Montrer que : $2EF = AB + DC$

3. Donner la bonne réponse : x et y deux réels tels que $-2 < x < -1$ et $y \in]2,4[$ alors :

a. $|y-x| = x-y$ ou b. $|y+x| = -x-y$ ou c. $||y|-|x|| = y+x$

(avec justification)

4. Calculer le produit suivant : $P = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\dots\dots\dots\left(1-\frac{1}{625}\right)$

EXERCICE 2 8 pts

1. Pour tout réel x , on considère l'expression : $A(x) = x^2 + 3x - 4$.

a. Calculer $A(x)$ pour $x = -4$.

b. Vérifier que : $A(x) - (x-1)^2 = 5(x-1)$.

c. En déduire une factorisation de : $A(x)$.

2. Soit l'expression $B(x) = x^3 - 27 - 13(x-3)$.

a. Factoriser $B(x)$.

b. Vérifier que pour tout réel x on a : $B(x) + (3-x)A(x) = 0$.

3. Soit I l'ensemble des réels x tel que : $2 < 5 - 3x < 5$.

a. Montrer que $I =]0,1[$.

b. Montrer que pour tout réel $x \in I$ on a : $B(x) > 0$ et que $\dfrac{A(x)}{B(x)} \in \left]-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}\right[$.

c. En déduire une comparaison de deux réels : $(1-10^{-9})^3$ et $27+13(-10^{-9}-2)$

EXERCICE 3 7 pts

Dans la figure ci-dessous, $[OA]$ un segment de longueur 7cm et **C** le cercle de centre O et de rayon 3cm qui coupe $[OA]$ au point I ,et M et N deux points du cercle **C** non diamétralement opposés et distincts de I . la parallèle a (OM) passant par I coupe (AM) en P , et la parallèle à (ON) passant par I coupe (AN) en Q .

1.a. Comparer les rapports : $\dfrac{AP}{AM}$ et $\dfrac{AQ}{AN}$ puis $\dfrac{IP}{OM}$ et $\dfrac{IQ}{ON}$

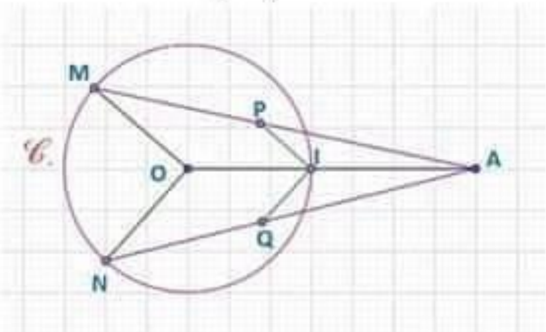
b. Déduire que (MN) et (PQ) sont parallèles et que $IP = IQ$.

2. La parallèle à (MN) passant par I coupe respectivement (MP) et (NQ) en K et L.

On donne les longueurs des segments suivants : $PK = a$,$QL = b$,$MK = x$,$NL = y$

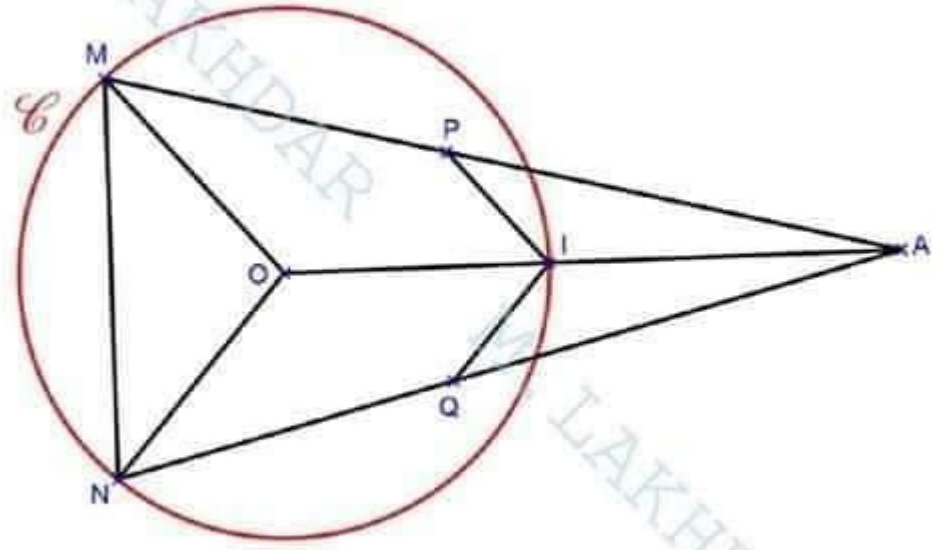
a. Montrer que les réels a, b ,x et y , vérifie la relation : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{y}$.

b. Calculer : $\dfrac{x^2 - xy}{y^2 + xy}$ si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{3}$



ANNEXE

NOM PRENOM.................................. CLASSE.........



M.LAKHDAR

CORRECTION DEVOIR DE CONTRÔLE2

EXERCICE 1 5 pts

1) $A = 2021(1+2+3+\dots+2022)$

$= 2021(1+2+3+\dots+2021) + 2021\times 2022$

$B = 2022(1+2+\dots+2021) = 2021(1+2+3+\dots+2021) + (1+2+\dots+2021)$

$A - B = \cancel{2021(1+2+\dots+2021)} + 2021\times 2022 - \cancel{2021(1+2+\dots+2021)} - (1+2+\dots+2021)$

$= 2021\times 2022 - (1+2+\dots+2021) = \underbrace{(2022+\dots+2022)}_{2021\text{-termes}} - \underbrace{(1+\dots+2021)}_{2021\text{-termes}} > 0$

d'où $\boxed{A > B}$

2) ds le triangle DBC

on a : $\begin{cases} (FG) \parallel (DC) \\ F = B * C \\ (FG) \cap (BD) = \{G\} \end{cases} \Rightarrow \boxed{G = B * D}$

et par suite $\boxed{DC = 2GF}$ ①

de m̂ ds le triangle DAB on a $\begin{cases} G = D * B \\ E = D * A \end{cases} \Rightarrow \boxed{2EG = AB}$ ②

d'autre part $G \in [EF]$ donc $EF = EG + GF$

$\Leftrightarrow 2EF = 2EG + 2GF = AB + DC$

conclusion : $\boxed{AB + DC = 2EF}$

3) $-2 < x < -1 \Rightarrow 1 < |x| < 2$
$y \in]2,4[\Rightarrow 2 < y < 4 \Rightarrow 2 < |y| < 4$ $\Big\}$ $|y| > |x|$

$\Rightarrow \big| |y| - |x| \big| = |y| - |x| = \boxed{y + x}$

4) $P = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots\dots \left(1 - \frac{1}{625}\right)$

$= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) \dots\dots \left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1+\frac{1}{25}\right)$

$= \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right) \dots\dots \left(1-\frac{1}{25}\right)\right]\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{25}\right)\right]$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \dots\dots \times \frac{\cancel{24}}{25} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{\cancel{3}} \times \frac{5}{\cancel{4}} \times \dots \times \frac{26}{\cancel{25}}$

$\boxed{P = \frac{13}{25}}$

EXERCICE 2 **8 pts**

LYCEE PILOTE BAYREM 5
EL MENZAH 8
M.LAKHDAR

1) $A(x) = x^2 + 3x - 4$

a) $x = -4 \Rightarrow A(-4) = (-4)^2 + 3(-4) - 4 = 16 - 16 = 0$

$A(-4) = 0$

b) $A(x) - (x-1)^2 = x^2 + 3x - 4 - (x-1)^2$

$= x^2 - 2x + 1 + 5x - 5 - (x-1)^2$

$= \cancel{(x-1)^2} - \cancel{(x-1)^2} + 5(x-1)$

d'où : $\boxed{A(x) - (x-1)^2 = 5(x-1)}$

c) $A(x) - (x-1)^2 = 5(x-1) \Leftrightarrow A(x) = (x-1)^2 + 5(x-1)$

$\Leftrightarrow A(x) = (x-1)(x-1+5)$

$\Leftrightarrow \boxed{A(x) = (x-1)(x+4)}$

2) $B(x) = x^3 - 27 - 13(x-3)$

a) $B(x) = (x-3)(x^2+3x+9) - 13(x-3)$

$= (x-3)(x^2+3x+9-13) = (x-3)(x^2+3x-4)$

or $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$ d'où

$\boxed{B(x) = (x-3)(x-1)(x+4)}$

b) D'après a) $B(x) = (x-3)(x^2+3x-4) = (x-3)A(x)$

$\Leftrightarrow B(x) - (x-3)A(x) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{B(x) + (3-x)A(x) = 0}$

3) a) $\boxed{x \in I} \Leftrightarrow 2 < 5 - 3x < 5$

$\Leftrightarrow -3 < -3x < 0$

$\Leftrightarrow 0 < x < 1$ d'où $\boxed{I =]0,1[}$

b)

$B(x) = \underbrace{(x-3)}_{<0}\underbrace{(x-1)}_{<0}\underbrace{(x+4)}_{>0}$ $\begin{cases} x \in]0,1[\\ x-3 \in]-3,-2[\\ x-1 \in]-1,0[\\ x+4 \in]4,5[\end{cases}$

$\Rightarrow$ $\boxed{B(x) > 0 \ , \ \forall x \in I}$

*) d'après 2) b) on a :

$B(x) = (x-3)\,A(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ pour $B(x) \neq 0$ (car $B(x) > 0$)

or $0 < x < 1 \Leftrightarrow -3 < x-3 < -2$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{x-3} < -\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < \dfrac{A(x)}{B(x)} < -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{A(x)}{B(x)} \in \left]-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}\right[}$

c) D'après (b), $\boxed{B(x) > 0}$ $\forall x \in]0,1[$

en particulier pour $x = 1 - 10^{-9}$ donc

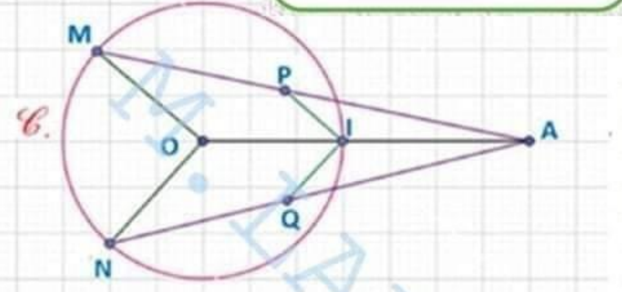
$B(1-10^{-9}) > 0 \Rightarrow (1-10^{-9})^3 - 27 - 13(1-10^{-9}-3) > 0$

$\Leftrightarrow \boxed{(1-10^{-9})^3 > 27 + 13(-10^{-9} - 2)}$

EXERCICE 3 7 pts

LYCEE PILOTE BAYREM 5
EL MENZAH 8
M.LAKHDAR

Dans la figure ci-contre, $[OA]$ un segment de longueur 7cm et $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 3cm qui coupe $[OA]$ au point I, et M et N deux points du cercle $\mathscr{C}$ non diamétralement opposés et distincts de I. La parallèle à (OM) passant par I coupe (AM) en P, et la parallèle à (ON) passant par I coupe (AN) en Q.



1°) a) Comparer les rapports :

$\frac{AP}{AM}$ et $\frac{AQ}{AN}$ puis $\frac{IP}{OM}$ et $\frac{IQ}{ON}$.

$\{A\} = (MP) \cap (OI)$
$(PI) \parallel (MO)$
donc d'aprés le Théorème de Thalès

on a : $\frac{AP}{AM} = \boxed{\frac{AI}{AO}} = \frac{IP}{OM}$

$\{A\} = (OI) \cap (NQ)$
$(IQ) \parallel (ON)$
donc d'aprés le Théorème de Thalès

on a : $\frac{AQ}{AN} = \boxed{\frac{AI}{AO}} = \frac{IQ}{ON}$

(1) et (2) donnent $\frac{AP}{AM} = \frac{AQ}{AN}$ et $\frac{IP}{OM} = \frac{IQ}{ON}$

b) Déduire que (MN) et (PQ) sont parallèles et $IP = IQ$.

A, P et M et A, Q et N sont alignés dans le même ordre et $\frac{AP}{AM} = \frac{AQ}{AN}$ donc d'aprés la réciproque de Thalès

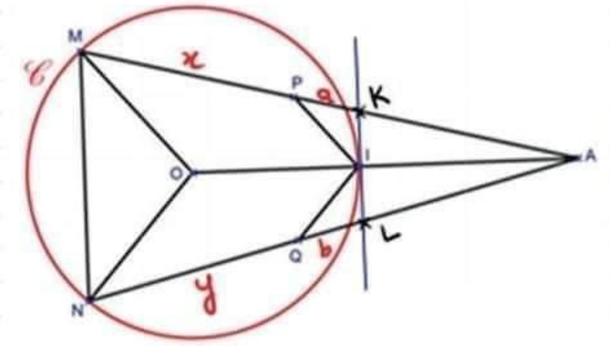
on a : $(MN) \parallel (PQ)$

on a : $\frac{IP}{OM} = \frac{IQ}{ON}$ et $OM = ON$ (rayons du cercle)

donc $IP = IQ$

2°) La parallèle à (MN) passant par I coupe respectivement (MP) et (NQ) en K et L.
On donne les longueurs des segments suivants : $PK = a$, $QL = b$, $MK = x$ et $NL = y$.

a) Montrer que les réels : a, b, x et y , vérifie la relation : $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$.



$$\left.\begin{array}{l} K \in (MP) \text{ et } L \in (NQ) \\ (MN) /\!/ (PQ) /\!/ (KL) \end{array}\right\}$$ alors d'après le Théorème de Thalès

on a $\boxed{\frac{PK}{PM} = \frac{QL}{QN}}$

sig $\frac{PK}{QL} = \frac{PM}{QN}$

sig $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}}$

b) Calculer : $\frac{x^2 - xy}{y^2 + xy}$ si $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$.

on a $\frac{a}{b} = \frac{x}{y} = \frac{1}{3}$ sig $\boxed{y = 3x}$

donc $\frac{x^2 - xy}{y^2 + xy} = \frac{x^2 - x \times 3x}{(3x)^2 + x \times 3x} = \frac{x^2 - 3x^2}{9x^2 + 3x^2} = \frac{-2\cancel{x^2}}{12\cancel{x^2}}$

$= \boxed{-\frac{1}{6}}$