Lycée pilote Bourguiba deTunis Lycée pilote Kbéli	Devoir de Contrôle 2	1 ere année M[r] Trabelsi Chokri M[r] Bouajila Ammar
22/ 11 / 2022	Mathématiques	Durée: 45 MINUTES

Exercice n°1 : Les questions 1°/ ; 2 et 3° / sont indépendantes.

1) Comparer les nombres a et b tels que $a = \sqrt{5} + \sqrt{7} - 2$ et $b = \sqrt{35}$

2) On donne la somme $S = \frac{2023}{100001} + \frac{2022}{10001} + \frac{2021}{1001} + \frac{2023}{1,00001} + \frac{2022}{1,0001} + \frac{2021}{1,001}$

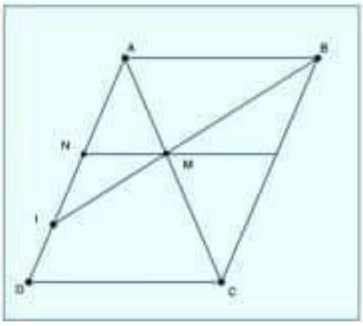
a) Soit n un entier naturel. Vérifier que $\frac{1}{1+10^{-n}} + \frac{1}{1+10^{n}} = 1$

b) En déduire la valeur de la somme S

3) Sur la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme.

- N est un point du côté [AD].
- La parallèle à la droite (AB) passant par N coupe la diagonale [AC] en M
- la droite (BM) coupe la droite (AD) en I.

Montrer que $\frac{NI}{AI} = \frac{AN}{AD}$



Exercice n°2

1) Soit $a = \frac{3\sqrt{2}.\sqrt{54}^{-1}}{(5\sqrt{3})^{-1}} + \frac{2\sqrt{10}-10}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ et $b = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{48}}{\sqrt{27}} - \frac{5^{-2}}{\sqrt{5}^{-3}}$

a) Montrer que, $a = 5 + 2\sqrt{5}$ et $b = 2 - \sqrt{5}$

b) Montrer que, $ab = -\sqrt{5}$

c) Déduire $\sqrt{\frac{a^{4}+b^{-6}}{25b^{2}+1}} = -b^{-3}$

2) a) Montrer que pour tout réel non nul x ; $\frac{2x-1}{x^2} \leq \frac{2x}{x^2+1}$

b) Comparer alors $\frac{3-2\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}} \leq \frac{4-2\sqrt{5}}{10-4\sqrt{5}}$

b) Ranger dans l'ordre croissant les nombres ; $\frac{2a-1}{a^2}$; $\sqrt{\frac{2a-1}{a^2}}$; $(\frac{2a-1}{a^2})^2$ et $\sqrt{\frac{2a}{a^2+1}}$

Exercice n°3

Soit ABCD un parallélogramme.

1) a) Construire le point I du segment[AB] telque $AI = \frac{2}{5}AB$

b) Construire le point J du segment[CD] telque $\frac{JC}{JD} = \frac{2}{3}$.

2) La droite (AJ) coupe respectivement (BD) en K et (BC) en L

a) Comparer les rapports $\frac{KL}{KA}$ et $\frac{KB}{KD}$.

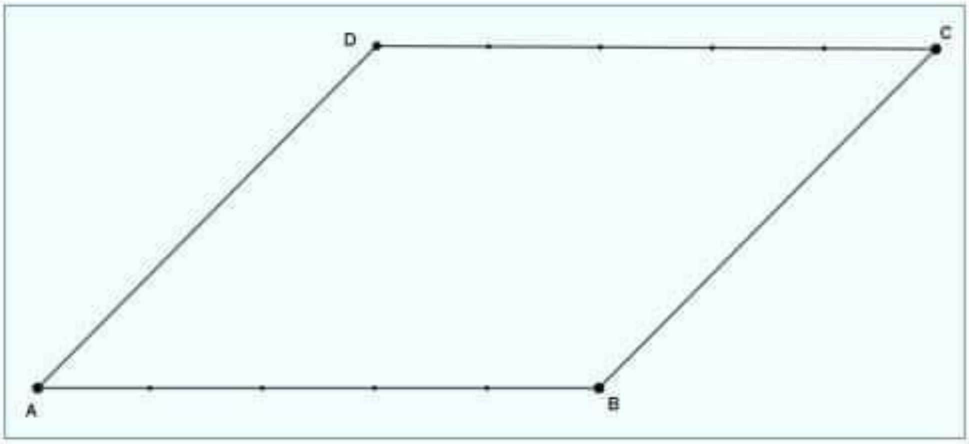
b) En déduire que $KA^2 = KL.KJ$.

3) a) Justifier que $\frac{BC}{BL} = \frac{3}{5}$.

b) Montrer alors que les droites (AL) et (CI) sont parallèles.

c) Soit A_1, l'aire du triangle BCI et A_2 celle du triangle BAL.

Evaluer le rapport $\frac{A_1}{A_2}$



Corection Dc2

Exercice 1

1/ Pour comparer a et b, on compare a+2 et b+2

$a+2=\sqrt{5}+\sqrt{7}$ et $b+2=\sqrt{35}+2$

$(a+2)^2=(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2=5+2\sqrt{35}+7=12+2\sqrt{35}$

$(b+2)^2=(\sqrt{35}+2)^2=35+4\sqrt{35}+4=39+4\sqrt{35}$

D'où $a+2<b+2$, ainsi $\boxed{a<b}$

2/ a) $\dfrac{1}{1+10^{-n}}+\dfrac{1}{1+10^{n}}=\dfrac{10^n}{10^n(1+10^{-n})}+\dfrac{1}{1+10^n}$

$=\dfrac{10^n}{10^n+1}+\dfrac{1}{1+10^n}=\dfrac{1+10^n}{1+10^n}=\boxed{1}$

b) $S=\dfrac{2023}{100001}+\dfrac{2022}{10001}+\dfrac{2021}{1001}+\dfrac{2023}{1{,}00001}+\dfrac{2022}{1{,}0001}+\dfrac{2021}{1{,}001}$

$=\dfrac{2023}{1+10^5}+\dfrac{2022}{1+10^4}+\dfrac{2021}{1+10^3}+\dfrac{2023}{1+10^{-5}}+\dfrac{2022}{1+10^{-4}}+\dfrac{2021}{1+10^{-3}}$

$=2023\underbrace{\left(\dfrac{1}{1+10^5}+\dfrac{1}{1+10^{-5}}\right)}_{1}+2022\underbrace{\left(\dfrac{1}{1+10^4}+\dfrac{1}{1+10^{-4}}\right)}_{1}+2021\underbrace{\left(\dfrac{1}{1+10^3}+\dfrac{1}{1+10^{-3}}\right)}_{1}$

$=2023+2022+2021=\boxed{6066}$

3/ Dans le triangle ADC :

$$\left.\begin{array}{l} N \in (AD) \\ M \in (AC) \\ (MN) // (DC) \end{array}\right\} \text{ D'après Thales } \boxed{\frac{AN}{AD} = \frac{MN}{DC}}$$

Dans le triangle IAB :

$$\left.\begin{array}{l} N \in (AI) \\ M \in (IB) \\ (MN) // (AB) \end{array}\right\} \text{ D'après Thales : } \boxed{\frac{IN}{IA} = \frac{MN}{AB}}$$

Comme $DC = AB$ alors on a :

$$\boxed{\frac{IN}{IA} = \frac{AN}{AD}}$$

Exercice 2

1/a)

$$a = \frac{3\sqrt{2}\,\sqrt{54}^{-1}}{(5\sqrt{3})^{-1}} + \frac{2\sqrt{10}-10}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

$$= 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{54}}{5\sqrt{3}}\right)^{-1} + \frac{2\sqrt{5}\,\cancel{(\sqrt{2}-\sqrt{5})}}{\cancel{\sqrt{2}-\sqrt{5}}}$$

$$= 3\sqrt{2}\;\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{54}} + 2\sqrt{5}$$

$$= \cancel{3}\cancel{\sqrt{2}}\;\frac{5\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}\cancel{\sqrt{6}}} + 2\sqrt{5}$$

$$= \boxed{5+2\sqrt{5}}$$

$$b = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{48}}{\sqrt{27}} - \frac{5^{-2}}{\sqrt{5}^{-5}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}^{5}}{5^{2}}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}^{5}}{\left((\sqrt{5})^{2}\right)^{2}}$$

$$= 2 - \frac{\sqrt{5}^{5}}{\sqrt{5}^{4}}$$

$$= \boxed{2-\sqrt{5}}$$

2/ a) $\dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2x-1}{x^2} = \dfrac{2x(x^2)}{x^2(x^2+1)} - \dfrac{(2x-1)(x^2+1)}{x^2(x^2+1)}$

$= \dfrac{\cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} - 2x + x^2 + 1}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2(x^2+1)}$

$= \dfrac{(x-1)^2}{x^2(x^2+1)} \geqslant 0$

Donc $\boxed{\dfrac{2x}{x^2+1} \geqslant \dfrac{2x-1}{x^2}}$

b) On remarque que :

$$\begin{cases} 3 - 2\sqrt{5} = 2(2-\sqrt{5}) - 1 = 2b - 1 \\ 9 - 4\sqrt{5} = 4 - 2\times 2\times\sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = (2-\sqrt{5})^2 = b^2 \end{cases}$$

et on a : $\begin{cases} 2b = 4 - 2\sqrt{5} \\ b^2 + 1 = 9 - 4\sqrt{5} + 1 = 10 - 4\sqrt{5} \end{cases}$

$\dfrac{2b-1}{b^2} \leqslant \dfrac{2b}{b^2+1}$ alors $\boxed{\dfrac{3-2\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}} \leqslant \dfrac{4-2\sqrt{5}}{10-4\sqrt{5}}}$

c) On a : $2a-1>0$ donc $\dfrac{2a-1}{a^2}>0$

Soit $x\in\mathbb{R}$

$$\frac{2x}{x^2+1}-1=\frac{2x-x^2-1}{x^2+1}=\frac{-(x^2-2x+1)}{x^2+1}=-\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\leqslant 0$$

d'où $\boxed{\dfrac{2x}{x^2+1}<1}$

On d'après 2/a) $\dfrac{2x-1}{x^2}\leqslant\dfrac{2x}{x^2+1}$

alors $\dfrac{2a-1}{a^2}\leqslant\dfrac{2a}{a^2+1}\leqslant 1$

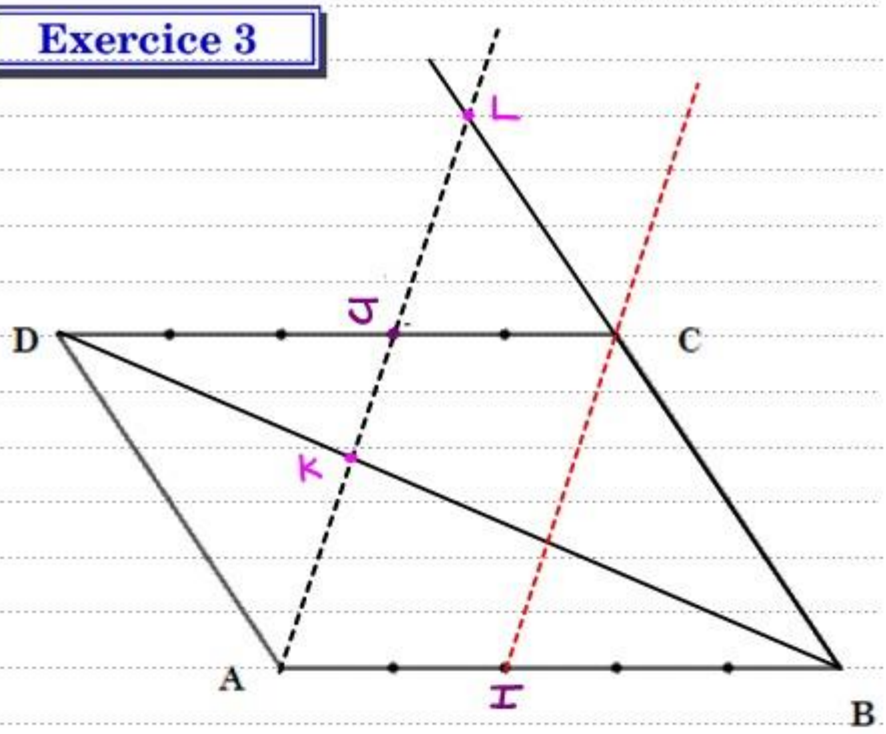
Donc $0\leqslant\dfrac{2a-1}{a^2}\leqslant\dfrac{2a}{a^2+1}\leqslant 1$

d'où $\sqrt{\dfrac{2a-1}{a^2}}\leqslant\sqrt{\dfrac{2a}{a^2+1}}$

et on a : $0\leqslant\dfrac{2a-1}{a^2}\leqslant 1$

Ainsi $\boxed{\left(\dfrac{2a-1}{a^2}\right)^2\leqslant\dfrac{2a-1}{a^2}\leqslant\sqrt{\dfrac{2a-1}{a^2}}\leqslant\sqrt{\dfrac{2a}{a^2+1}}}$

Exercice 3



1/a) $\boxed{AI = \frac{2}{5} AB}$

b) $\frac{JC}{JD} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3JC = 2JD$

$\Rightarrow 3(DC - DJ) = 2DJ \Rightarrow 3DC - 3DJ = 2DJ$

$\Rightarrow 3DC = 5DJ \Rightarrow \boxed{DJ = \frac{3}{5} DC}$

2/a) (AL) et (BD) se coupent en K

tel que (AD) // (BL) car (AD) // (BC) et L ∈ (BC)

donc d'après le théorème de Thalès:

$$\frac{KL}{KA} = \frac{KB}{KD} = \frac{BL}{AD} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{KL}{KA} = \frac{KB}{KD}} \; (1)$$

b) (DB) et (AJ) se coupent en K tel

que (DJ) // (AB), donc d'après le théorème

de Thalès : $\frac{KA}{KJ} = \frac{KB}{KD} = \frac{AB}{DJ}$ d'où $\boxed{\frac{KA}{KJ} = \frac{KB}{KD}}$ (2)

d'après (1) et (2) on obtient: $\frac{KL}{KA} = \frac{KA}{KJ}$

et par suite $\boxed{KA^2 = KL.KJ}$

3/a) Dans le triangle LAB :

J ∈ (AL), C ∈ (BL) et (CJ) // (AB)

alors d'après le théorème de Thalès:

$$\frac{LJ}{LA} = \frac{LC}{LB} = \frac{JC}{AB}$$

$$\frac{LC}{LB} = \frac{JC}{AB} = \frac{\frac{2}{5}DC}{AB} = \frac{2/5\,DC}{DC} = \frac{2}{5}$$

alors $5LC = 2LB$

sig $5(BL - BC) = 2BL$

sig $5BL - 5BC = 2BL$

sig $3BL = 5BC$ sig $\boxed{\frac{BC}{BL} = \frac{3}{5}}$

b) (BL) et (BA) se coupent en B

$C \in (BL)$ et $I \in [BA]$, comme

$\frac{BC}{BL} = \frac{3}{5} = \frac{BI}{BA}$, d'après la réciproque

de Thalès on a $\boxed{(CI) \parallel (AL)}$

c) $\frac{BC}{BL} = \frac{BI}{BA} = \frac{IC}{AL} = \frac{3}{5}$

donc BAL est un agrandissement

du triangle BCI à l'échelle $\frac{5}{3}$

alors $\mathcal{A}_2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \mathcal{A}_1$ donc $\boxed{\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2}$