Devoir de Contrôle n°2

Exercice 1 (6 points)

Soient x et y deux réels tels que : $x = \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} - 5$ et $y = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2} - (\sqrt{5} + 3)$.

1. Développer $(3 + \sqrt{5})^2$ puis simplifier x.
2. Montrer que $y = 2 + \sqrt{5}$.
3. a) Justifier que x et y sont deux inverses.

   b) En déduire que : i. $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2 = 20$ ii. $\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2} = 4$.

Exercice 2 (4 points)

Soit l'ensemble $I = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } -7 \leq -3x + 1 \leq -5\}$.

1. Montrer que : $I = \left[2, \dfrac{8}{3}\right]$.
2. On pose : $A = \dfrac{2a + 3}{a + 2}$, pour tout $a \in I$.

   a) Vérifier que : $A = 2 - \dfrac{1}{a + 2}$.

   b) Encadrer $\dfrac{1}{a + 2}$, en déduire que : $\dfrac{7}{4} \leq A \leq \dfrac{25}{14}$.

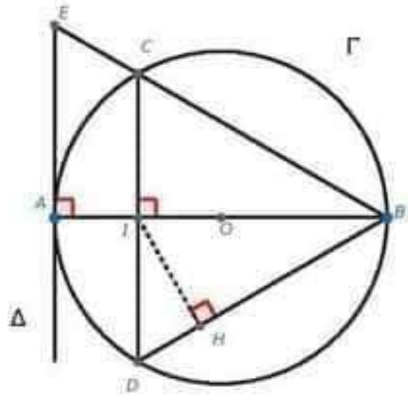
Exercice 3 (2 points)

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
2. En déduire que : $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{20} \ldots\ldots\ldots + \dfrac{1}{72} + \dfrac{1}{90} = \dfrac{9}{10}$.

Exercice 4 (8 points)

Dans la figure ci-contre :

- Γ est un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que : $AB = 4$.
- I est le milieu du segment $[AO]$.
- La droite (CD) est perpendiculaire à (AB) passant par I.
- La droite Δ est tangente à Γ en A coupe (BC) en E.
- H est le projeté orthogonal de I sur la droite (BD).



1. a) Montrer que AOC est un triangle équilatéral .

   b) Déduire IC puis montrer que $BC = 2\sqrt{3}$.
2. Prouver que : $\dfrac{BI}{BA} = \dfrac{BC}{BE}$ puis déduire que $BE = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.
3. a) Montrer que : $\dfrac{BH}{BD} = \dfrac{BI}{BA}$.

   b) En déduire que les droites (DE) et (HC) sont parallèles.

Correction DC 1: Mathématiques

Proposé par : Mr Mohamed HM

- Exercice N°1 :

1) $(3+\sqrt{5})^2 = 9 + 6\sqrt{5} + 5 = 14 + 6\sqrt{5}$

$x = \sqrt{14+6\sqrt{5}} - 5 = |3+\sqrt{5}| - 5 = \sqrt{5} - 2 = x$

2) $y = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} - (\sqrt{5}+3) = \dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}{1} - (\sqrt{5}+3) = 5 + 2\sqrt{5} - \sqrt{5} - 3$

$y = 2 + \sqrt{5}$

3/a- $x \cdot y = (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$

$= 5 - 4$

$x \cdot y = 1 \Rightarrow x$ et y sont inverses.

b/ i) $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2 = (y+x)^2 = x^2 + y^2 + 2\underbrace{xy}_{1}$

$= 5 - 4\sqrt{5} + 4 + 4 + 4\sqrt{5} + 5 + 2$

$= 20$

ii) $\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2} = \sqrt{(x+y)^2 - 2xy - 2}$

$= \sqrt{20 - 2 - 2}$

$= \sqrt{16} = 4$

- Exercice N°2 :

on a $-7 \leq -3x + 1 \leq -5$; $x \in \mathbb{R}$

$-8 \leq -3x \leq -6$

$6 \leq 3x \leq 8$

$2 \leq x \leq \dfrac{8}{3} \Rightarrow x \in \left[2 ; \dfrac{8}{3}\right]$

$\Rightarrow I = \left[2 ; \dfrac{8}{3}\right]$

2) $A = \dfrac{2a+3}{a+2}$; $a \in I$

a/ $2 - \dfrac{1}{a+2} = \dfrac{2a+4-1}{a+2} = \dfrac{2a+3}{a+2} = \boxed{A}$

b/ $a \in I$ sig $2 \leq a \leq \dfrac{8}{3}$

éq $4 \leq a+2 \leq \dfrac{14}{3}$

donc $\dfrac{3}{14} \leq \dfrac{1}{a+2} \leq \dfrac{1}{4}$

On a $\dfrac{3}{14} \leq \dfrac{1}{a+2} \leq \dfrac{1}{4}$

$-\dfrac{1}{4} \leq -\dfrac{1}{a+2} \leq -\dfrac{3}{14}$

$2 - \dfrac{1}{4} \leq 2 - \dfrac{1}{a+2} \leq 2 - \dfrac{3}{14}$

$\dfrac{7}{4} \leq A \leq \dfrac{25}{4}$

Mohamed H 16/11/2023

*** Exercice N°3 :

1) $\dfrac{1}{n(n+1)} \stackrel{?}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

On a : $\dfrac{1(n+1)}{n(n+1)} - \dfrac{1 \times n}{(n+1)n} = \dfrac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$

2) $A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{20} + \dots + \dfrac{1}{72} + \dfrac{1}{90}$

$= \dfrac{1}{1(1+1)} + \dfrac{1}{2(2+1)} + \dfrac{1}{3(3+1)} + \dfrac{1}{4(4+1)} + \dots + \dfrac{1}{8(8+1)} + \dfrac{1}{9(9+1)}$

$= 1 - \cancel{\dfrac{1}{2}} + \cancel{\dfrac{1}{2}} - \cancel{\dfrac{1}{3}} + \cancel{\dfrac{1}{3}} - \cancel{\dfrac{1}{4}} + \cancel{\dfrac{1}{4}} - \cancel{\dfrac{1}{5}} + \cancel{\dots} + \cancel{\dfrac{1}{8}} - \cancel{\dfrac{1}{9}} + \cancel{\dfrac{1}{9}} - \dfrac{1}{10}$

$= 1 - \dfrac{1}{10} \Rightarrow \dfrac{10-1}{10} \Rightarrow A = \dfrac{9}{10}$

Exercice 4 :

1) a : on a $I = A * O$ et $(CD) \perp (AO)$ donc (CD) est la médiatrice de $[AO]$

donc $CO = CA$
et $CO = OA$ (deux Rayons)

$\Rightarrow OA = OC = AC$

$\Rightarrow$ OAC est un triangle équilatéral

b) $IC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times OA$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \Rightarrow IC = \sqrt{3}$

Mohamed HN

IBC est un triangle rectangle en I

$\Rightarrow$ D'après le Théorème de Pythagore on a :

$BC^2 = IB^2 + IC^2$

$= 3^2 + \sqrt{3}^2 \Rightarrow BC^2 = 12$

$\Rightarrow BC = \sqrt{12}$ ou $BC = -\sqrt{12}$ or $BC > 0$

$BC = 2\sqrt{3}$

2) Dans le triangle ABE on a :
$I \in (AB)$; $C \in (BE)$ et $(IC) // (AE)$ $\left(\begin{cases} (IC) \perp (AB) \\ (AE) \perp (AB) \end{cases} \right)$

D'après le Théorème de Thalès on a

$\frac{BI}{BA} = \frac{BC}{BE} = \frac{IC}{AE}$ donc $\frac{BI}{BA} = \frac{BC}{BE}$

$\Rightarrow BE = \frac{AB \times BC}{BI} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BE = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

3/ a/

ABD est un triangle rectangle en D ([AB] diamètre de Γ et $D \in \Gamma$)

$$\Rightarrow \begin{cases} (AD) \perp (BD) \\ (IH) \parallel (BD) \end{cases} \Rightarrow (IH) \parallel (AD)$$

dans le triangle ABD on a :

$I \in (AB)$; $H \in (BD)$ et $(IH) \parallel (AD)$

d'après le Théorème de Thalès on a.

$$\frac{BH}{BD} = \frac{BI}{BA} = \frac{IH}{AD} \quad \text{éq} \quad \frac{BH}{BD} = \frac{BI}{BA}$$

b/ on a :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{BH}{BD} = \dfrac{BI}{BA} \\ \text{(d'après q2)} \quad \dfrac{BI}{BA} = \dfrac{BC}{BE} \end{array}\right\} \quad \frac{BH}{BD} = \frac{BC}{BE}$$

$\Rightarrow$ donc d'après la réciproque de Thalès $(HC) \parallel (DE)$

Merci Mr : Guedri Jamel Eddine

Prof : Mohamed HM