DEVOIR ** 02/2 **

DEVOIRS DE CONTRÔLES N° 2

Exercice 1 :

1 On considère deux réels a et b non nuls tel que $a^2+b^2=1$.

(a) Montrer que $(a-3b)^2+(3a+b)^2=10$

(b) Montrer que $a^6+b^6+3a^2b^2=1$

2 On considère deux réels x et y non nuls distincts tel que $x^2+y^2=6xy$

(a) Vérifier que $\left|\frac{x+y}{x-y}\right|=\sqrt{2}$

(b) Déduire que $\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=-2$

Exercice 2 :

Les questions sont indépendantes

1 (a) Résoudre dans IR l'équation $(E_1): 2x^2-5x+2=0$

(b) Résoudre dans IR l'équation $(E_2): 2x^2-3x-2=0$

(c) Déduire la résolution de $(E_3): \frac{|2x^2-4x|}{2-x}=1$

$$(E_4): \left(2x^2-5x+2\right)^2+\left(2x^2-3x-2\right)^2=0$$

2 Résoudre dans IR L'équation $(E_5): \sqrt{|x+1|+1}=|x+1|-1$

Exercice 3 :

$\overline{ABC}$ un triangle tel que $AB=7, AC=4$ et $BC=8$.D un point de $[AC]$ tel que $AD=1$. La parallèle à (BC) menée de D coupe (AB) en E.

1 (a) Montrer que $\frac{AE}{AD}=\frac{1}{4}$.

(b) En déduire que $\frac{BE}{BA}=\frac{3}{4}$.

2 F le point de $[AC]$ tel que $BF=6$. Montrer que $(EF)//(AC)$.

3 Les droites (AF) et (EC) se coupent en K. Déterminer $\frac{KE}{KC}$.

Exercice 1 :

$a^2+b^2=1.$

1/ a) $(a-3b)^2+(3a+b)^2=a^2+9b^2-6ab+9a^2+b^2+6ab=10a^2+10b^2$
$=10(a^2+b^2)$
$=10.$

b) $(a^2+b^2)^3=1=a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=\underbrace{a^6+b^6}_{=a}+3a^2b^2\underbrace{(a^2+b^2)}_{=1}$

donc $a^6+b^6+3a^2b^2=1$

2/ a) $\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^2=\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}=\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2-2xy}=\frac{6xy+2xy}{6xy-2xy}=\frac{8xy}{4xy}=2 \Rightarrow \left|\frac{x+y}{x-y}\right|=\sqrt{2}.$

b) $\sqrt{6-4\sqrt2}^2+\sqrt{6+4\sqrt2}^2=6-4\sqrt2+6+4\sqrt2=12=6\times\left(\sqrt{6-4\sqrt2}\cdot\sqrt{6+4\sqrt2}\right)=6\sqrt{36-3}$

on pose $x=\sqrt{6-4\sqrt2}$ et $y=\sqrt{6+4\sqrt2}$ et $x<y$ donc $\frac{x+y}{x-y}=-2.$

Exercice 2 :

1/a) (E_1) : $2x^2-5x+2=2\left(x^2-\frac{5}{2}x+1\right)=2\left(\left(x-\frac54\right)^2-\frac{25}{16}+1\right)=0$

$\left(x-\frac54\right)^2-\frac{9}{16}=\left(x-\frac54\right)^2-\left(\frac34\right)^2=\left(x-\frac54-\frac34\right)\left(x-\frac54+\frac34\right)=(x-2)(x-1)=0$ $\begin{cases}x=2\\ \text{ou}\\ x=1\end{cases}$

$S_{\mathbb{R}}=\{1;2\}.$

b) (E_2) : $2x^2-3x-2=2\left(x^2-\frac32x-1\right)=2\left(\left(x-\frac34\right)^2-\left(\frac34\right)^2-1\right)=2\left(\left(x-\frac34\right)^2-\left(\frac54\right)^2\right)$

$=2\left(x-\frac34-\frac54\right)\left(x-\frac34+\frac54\right)=2(x-2)\left(x+\frac12\right)=0$ $\begin{cases}x=2\\ \text{ou}\\ x=\left(-\frac12\right)\end{cases}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\left(-\frac12\right);2\right\}.$

c) (E_3) : $\frac{|2x^2-4x|}{2-x}=1 \Leftrightarrow$ C.E : $2-x>0 \Rightarrow x<2$ car $|2x^2-4x|\geq 0$

$|2x^2-4x|=2-x \Rightarrow 2x^2-4x=2-x$ ou $2x^2-4x=x-2$

$2x^2-3x-2=0$ ou $2x^2-5x+2=0$

et $x<2$ $\quad S_{\mathbb{R}}=\left\{1;\left(-\frac12\right)\right\}.$

(E_4) : $(2x^2-5x+2)^2=0$ et $(2x^2-3x-2)^2=0$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{1;2;\left(-\frac12\right)\right\}.$

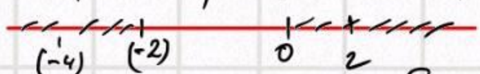
2/ (E_5) : $\sqrt{|x+1|+1}=|x+1|-1$: CE : $|x+1|+1>0$ tj vrai

et $|x+1|-1>0 \Rightarrow |x+1|>1 \Rightarrow x+1>1$ ou $x+1<-1$

$x>0$ ou $x<-2.$

et $|x+1|+1=|x+1|^2+1-2|x+1|$

$|x+1|^2-3|x+1|=0 \Rightarrow |x+1|(|x+1|-3)=0$ $\begin{cases}x+1=0 \Rightarrow x=(-1)\\ |x+1|=3 \Rightarrow x+1=3 \text{ ou } x+1=(-3)\end{cases}$



$S_{\mathbb{R}}=\{-4;2\}.$ $\quad x=2$ ou $x=(-4)$

Exercice 1 :

$1 \leq x \leq 3$ $\quad 4 \leq y \leq 5$ $\quad -3 \leq -x \leq -1$ $\quad -5 \leq -y \leq -4$

① $1-5 \leq x-y \leq 3-4$

$-4 \leq x-y \leq -1$

$3 \leq 3x \leq 9$

$-10 \leq -2y \leq -8$

$1 \leq 3x-2y+8 \leq 9$.

$-10 \leq -2y \leq -8$

$-5 \leq -2y+5 \leq -3$

② on a $x < y \Rightarrow x-y < 0$ et $3x-2y+8 > 0$ et $-2y+5 < 0$

$\Rightarrow A = 3(y-x) + 3x-2y+8 + (-2)y+5 = 13-y$.

Exercice 2 :

1°/ $A = 8 + \sqrt{4\times7} - \sqrt{25\times7} = 8 + 2\sqrt7 - 5\sqrt7 = 8-3\sqrt7$.

2°/ $B = \dfrac{3(2\sqrt2+\sqrt7)}{(2\sqrt2)^2-\sqrt7^2} - \dfrac{4(3\sqrt2-4)}{(3\sqrt2)^2-4^2} = \dfrac{6\sqrt2+3\sqrt7}{8-7} - \dfrac{12\sqrt2-16}{18-16} = 6\sqrt2+3\sqrt7-6\sqrt2+8$

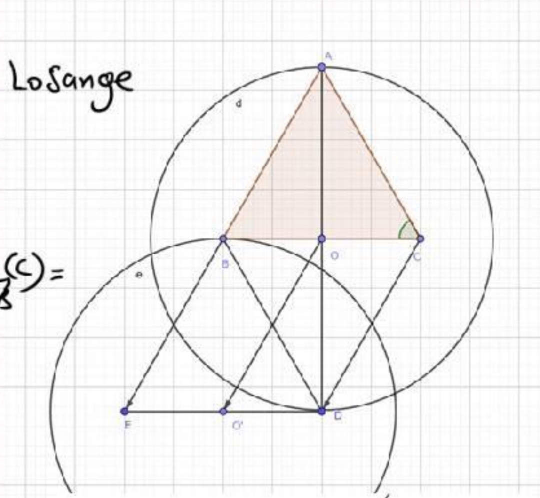
$B = 3\sqrt7+8$.

3°/ $A\times B = (8-3\sqrt7)(8+3\sqrt7) = 64-63 = 1 \Rightarrow$ A et B sont inverses.

4°/ $A^3\times B^3 + |A-B| = (A\times B)^3 + B-A = 1+3\sqrt7+8-8+3\sqrt7 = 1+6\sqrt7$.

Exercice 3 :

1°/ a) $\rightarrow$



b) on a $\vec{CD} = \vec{AB} \Rightarrow ABDC$ # et $AB=AC \Rightarrow$ Losange

$\vec{BE} = \vec{AB} \Rightarrow B = A*E$ et $BA=BE=BD$

$\Rightarrow$ AED triangle rectangle en D.

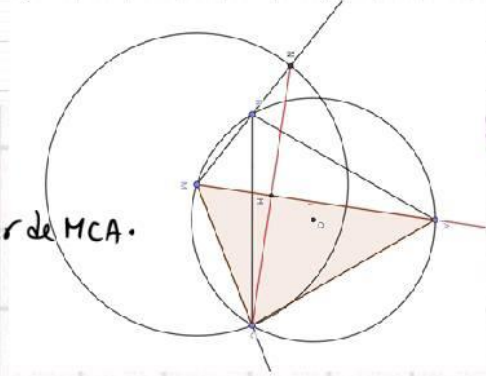
2°/ b) $O = B*C \Rightarrow t_{\vec{AB}}(O) = t_{\vec{AB}}(B) * t_{\vec{AB}}(C) =$

$\Rightarrow O' = E*1$

3°/ $\mathcal{C}' = \mathcal{C}'(O'; O'B)$

Exercice 4 :

1°/ a) voir la fig.



b) on a $\widehat{AC} = \widehat{AB}$ donc $\widehat{AMC} = \widehat{AMB}$

donc [MA) bissectrice de [MB; MC].

2°/ a) on a [MA) bissectrice de [MC; MN]

et $MC=MN \Rightarrow (MH)\perp(CH) \Rightarrow (CH)$ hauteur de MCA.

b) H se déplace sur l'arc de cercle de diamètre [AC].

Correction de devoir de synthèse n°3